

제 2 교시

수학 영역(가형)

5지선다형

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{3^x - 1}$ 의 값은? [2점]
- ① $\log_2 3$ ② $\log_3 2$ ③ 1 ④ $\ln 2$ ⑤ $\ln 3$

2. ${}_n P_2 = 20$ 일 때, 자연수 n 의 값은? [2점]
- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

3. $f(x) = \sin x + \cos 2x$ 일 때, $f'(\frac{\pi}{6})$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ -1

4. 좌표 평면에서 곡선 $y = \log_a(nx)$ 가 x 축과 만나는 점의 x 좌표를 x_1 , $y = 2$ 와 만나는 점의 x 좌표를 x_2 라고 하자. $2x_1 = x_2$ 일 때 a 의 값은? [3점]

- ① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ 3

5. 두 사건 A, B 에 대하여

$$P(A) = \frac{1}{5}, P(B) = \frac{1}{3}, P(A \cap B^c) = 0 \text{ 일 때, } P(A|B)$$

의 값은? [3점]

- ① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{1}{15}$ ⑤ 0

6. 집합 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 를 공집합이 아닌 서로소인 2개의 부분집합으로 분할하는 방법의 수를 구하면? [3점]

- ① 4 ② 6 ③ 7 ④ 10 ⑤ 15

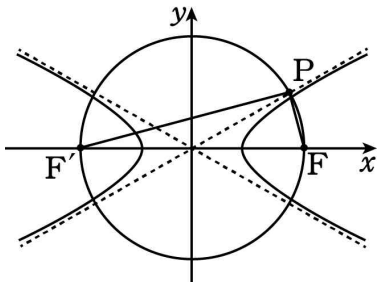
7. $0 \leq x \leq 2\pi$ 일 때, $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \cos^2(x + \pi)$ 가 최솟값을 갖는 x 좌표를 모두 더한 값은? [3점]

- ① $\frac{5}{2}\pi$ ② 2π ③ $\frac{3}{2}\pi$ ④ $\frac{4}{3}\pi$ ⑤ π

8. 주사위 두 개를 동시에 던져서 나온 두 눈을 각각 a, b 라고 하자. a, b 가 서로 소일 때, $a \geq b$ 일 확률을 구하면? [3점]

- ① $\frac{5}{21}$ ② $\frac{9}{23}$ ③ $\frac{12}{23}$ ④ $\frac{11}{23}$ ⑤ $\frac{21}{36}$

9. 그림과 같이 두 초점의 좌표가 $F'(-5, 0), F(5, 0)$ 이고 주축의 길이가 8인 쌍곡선의 점근선과 선분 $\overline{F'F}$ 를 지름의 양끝으로 하는 원이 만나는 점 중에서 제1사분면 위의 점을 P 라고 할 때, $\angle PF'F = \theta$ 라고 하면 $\cos 2\theta$ 의 값은? [3점]



- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

10. 모든 실수에서 연속인 함수 $f(x)$ 에 대하여 다음의 조건이 성립한다.

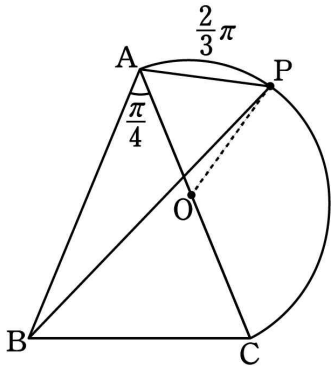
$$(가) f(x) = f(-x)$$

$$(나) f(2) = 10, f'(2) = 6$$

$\int_{-1}^1 \{f'(2x) + f''(2x)\} dx$ 의 값을 구하면? [3점]

- ① 1 ② 3 ③ 5 ④ 6 ⑤ 8

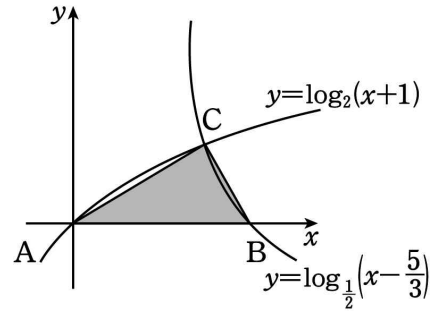
11. 그림과 같이 평면 위 $\overline{AB} = \overline{AC} = 4$, $\angle CAB = \frac{\pi}{4}$ 인 삼각형 ABC가 있다. 두 점 A, C를 지름의 양 끝점으로 하는 반원 위에 점 P가 있고, 호 \widehat{AP} 의 길이는 $\frac{2}{3}\pi$ 이다. 이때, 삼각형 ABP의 넓이를 구하면? [3점]



- ① $2\sqrt{3}$ ② $\sqrt{2} + \sqrt{6}$ ③ $\sqrt{6}$
- ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ $3 + 4\sqrt{3}$

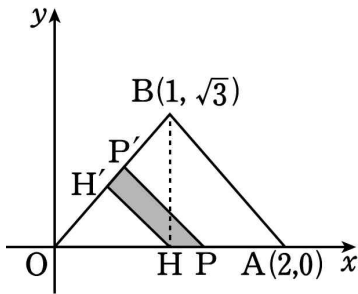
12. 그림과 같이 두 곡선

$y = \log_2(x+1)$, $y = \log_{\frac{1}{2}}\left(x - \frac{5}{3}\right)$ 이 x 축과 만나는 두 점과 두 곡선의 교점으로 만들어지는 삼각형의 넓이를 구하면? [3점]



- ① $\frac{4}{3} \log_2 3$ ② $\frac{5}{3} \log_2 3$ ③ $\frac{5}{2} \log_2 3$
- ④ $\frac{4}{3} \log_2 5$ ⑤ $\frac{5}{2} \log_2 5$

13. 다음 그림과 같이 점 $O(0, 0)$, $A(2, 0)$, $B(1, \sqrt{3})$ 을 꼭짓점으로 하는 정삼각형이 있다. 점 B 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라고 하고 선분 HA 위에 동점 $P(a, 0)$ 를 잡는다. 점 P 에서 직선 AB 에 평행한 직선을 그어 선분 OB 와 만나는 점을 P' , 점 H 에서 직선 AB 에 평행한 직선을 그어 선분 OB 와 만나는 점을 H' 이라고 하자. 사다리꼴 $HPP'H'$ 의 넓이를 $S(a)$ 라고 할 때, $\lim_{a \rightarrow 1^+} \frac{S(a)}{a-1}$ 의 값은? [3점]



- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ④ 1 ⑤ $\sqrt{3}$

14. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 A 로의 함수 중에서 다음 두 조건을 만족하는 함수 f 의 개수를 구하면? [4점]

- (가) 함수 f 는 일대일 대응이다.
 (나) $f(n+1) - f(n) = 3$ 이 성립하는 정의역 A 의 원소 n 이 적어도 하나 존재한다.

- ① 30 ② 35 ③ 42 ④ 50 ⑤ 66

15. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 0이 아닌 모든

실수 x 에 대하여 $\int_0^1 f(x+t)dt = \frac{e^x}{x}$ 를 만족시킬 때,

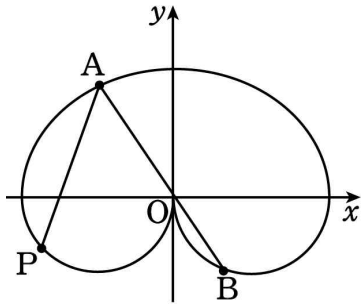
$f(3) - f(2)$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{e^2}{4}$ ② $\frac{e^2}{2}$ ③ e ④ $\frac{e}{2}$ ⑤ 1

16. 함수 $f(x) = e^{-\frac{x^2}{a}}$ ($a > 0$)의 두 변곡점 사이의 거리가 10 이하가 되는 상수 a 의 최댓값을 구하면? [4점]

- ① 15 ② 25 ③ 30 ④ 50 ⑤ 55

17. 좌표평면에서 두 원 $(x+1)^2+y^2=1$, $(x-1)^2+y^2=1$ 의 중심을 두 초점으로 하고 장축의 길이가 4인 타원이 있다. 직선 $x=-1$ 과 만나는 이 타원 위의 점을 A라 하고 이 점과 원점을 지나는 직선 AO가 원 $(x-1)^2+y^2=1$ 과 만나는 점을 B이라고 하자. 원 $(x+1)^2+y^2=1$ 위를 움직이는 동점 P에 대하여 삼각형 APB의 넓이가 최대가 될 때 점 P에서 직선 AB까지의 거리를 구하면? [4점]



- ① $\frac{3\sqrt{13}}{13}$ ② $1 + \frac{3\sqrt{13}}{13}$ ③ $\frac{\sqrt{13}}{11}$
- ④ $2 + \frac{2\sqrt{13}}{11}$ ⑤ $3 + \frac{2\sqrt{13}}{9}$

18. 좌표평면 위의 두 점 $P(x, 0)$, $Q\left(x, \frac{\sin x}{x}\right)$ 를 이은 선분을 한 변으로 하고 이 평면에 수직으로 세운 정사각형을 만든다. 점 P가 x 축의 양의 방향으로 $(\pi, 0)$ 에서 $(2\pi, 0)$ 까지 움직일 때 이 정사각형이 만드는 입체도형의 부피를 V 라고 할 때, $\int_{2\pi}^{4\pi} \frac{\sin x}{x} dx$ 의 값을 V 로 나타낸 것은? [4점]

- ① $\frac{V}{3}$ ② $\frac{V}{2}$ ③ V ④ $2V$ ⑤ $3V$

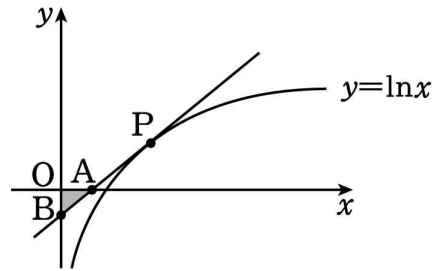
19. 다음은 $\int_0^\pi e^{\sin x} dx = A$ 일 때, $\int_0^\pi x e^{\sin x} dx$ 의 값을 구하는 과정이다.

$f(x) = x e^{\sin x}$ 라고 하면
 $f(\pi - x) = (\pi - x) e^{\sin(\pi - x)} = (\pi - x) e^{(가)}$ 이다.
 한편 $\int_0^\pi f(\pi - x) dx$ 에서 $t = \pi - x$ 라고 하면,
 $\frac{dt}{dx} = -1$ 이고 $x = 0$ 이면 $t = \pi$, $x = \pi$ 이면 $t = 0$
 이므로 $\int_0^\pi f(x) dx = \int_0^\pi f(\pi - x) dx$ 가 성립한다.
 따라서
 $\int_0^\pi x e^{\sin x} dx = \int_0^\pi (\pi - x) e^{(가)} dx$
 $= \int_0^\pi \pi e^{(가)} dx - \int_0^\pi x e^{(가)} dx$ 이고,
 $\int_0^\pi \pi e^{(가)} dx = (나)$ A이다.
 $\therefore \int_0^\pi x e^{\sin x} dx = (다)$ A

위의 과정에서 (가)에 들어갈 식을 $g(x)$, (나), (다)에 들어갈 상수를 a, b 라고 할 때 $\frac{a}{b} \cdot g\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 의 값은? [4점]

- ① 1 ② π ③ 5 ④ 2π ⑤ 7

20. $0 < t < e$ 인 실수 t 에 대하여 곡선 $y = \ln x$ 위의 점 $P(t, \ln t)$ 에서의 접선의 x 절편을 A, y 절편을 B라 하자. 원점 O와 두 점 A, B를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 $f(t)$ 라고 할 때, $f(t)$ 의 최댓값은? (단, e 는 자연로그의 밑이다.) [4점]



- ① $3e^2$ ② $3e$ ③ $2e$ ④ e ⑤ $\frac{2}{e}$

21. 함수 $f(x) = \ln(2 - \sin x)$ 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

$$\neg. f'(0) < 0$$

$$\neg. \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x) dx \geq \frac{\pi}{12} \ln 3$$

$$\square. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{f(x)}{x} dx < \ln \frac{3}{2}$$

- ① \neg ② \neg, \neg ③ \neg, \square
 ④ \neg, \square ⑤ \neg, \neg, \square

단답형

22. 함수 $f(x) = \frac{\ln x}{x^2 + 1}$ 에 대하여 $10f'(1)$ 의 값을 구하시오. [3점]

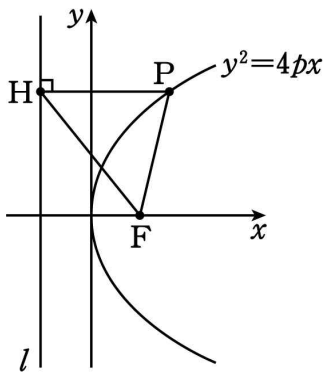
23. $(x^2 + 2x)^5$ 의 전개식에서 x^6 의 계수를 구하시오. [3점]

24. 1부터 10까지의 자연수가 각각 적힌 10장의 카드에서 차례로 뽑은 3장의 카드에 적힌 수를 각각 a, b, c 라 하고 $a < b < c$ 가 될 확률을 $\frac{q}{p}$ 라고 할 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

[3점]

26. 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하며 $g(0)=0, g'(0)=e$ 이다. 함수 $f(x)=|g(kx)|-\pi|x|$ 가 $x=0$ 에서 미분 가능하도록 하는 k 의 값을 $a\frac{\pi}{e}$ 라고 할 때, $10a$ 의 값을 구하시오.(단, $k > 0$) [4점]

25. 포물선 $y^2 = 4px$ 의 초점을 F, 포물선 위의 점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\overline{HF} : \overline{PF} = 2 : \sqrt{3}$ 일 때의 직선 PF의 기울기를 m 이라고 할 때, $10m^2$ 의 값을 구하시오. [3점]

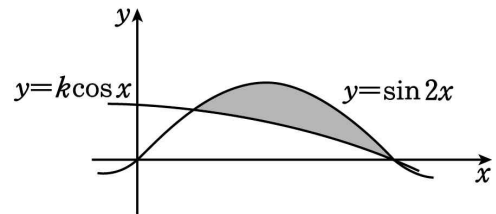


27. 1부터 10까지의 자연수 중에서 숫자 하나를 선택하여 좌표평면 위의 점 P를 다음과 같은 규칙으로 이동시킨다.

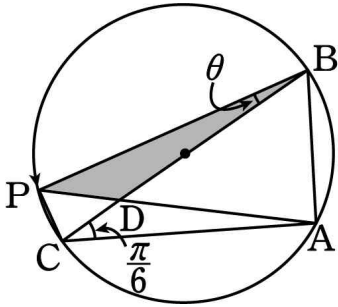
- (가) 선택한 수의 약수의 개수가 짝수이면 x 축에 대하여 대칭이동 한다.
 (나) 선택한 수의 약수가 개수가 홀수이면 y 축에 대하여 대칭이동 한다.

점 P가 제1사분면 위에 있을 때, 위와 같은 시행을 3번 반복하였을 때 점 P가 제4사분면 위로 이동하게 될 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소이다.) [4점]

28. 그림과 같이 두 곡선 $y = \sin 2x$, $y = k \cos x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{1}{2}$ 이 되도록 하는 상수 $k = a + b\sqrt{2}$ 이다. $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오. (단, $0 < k < 1$) [4점]



29. 그림과 같이 길이가 4인 선분 BC를 지름으로 하는 원이 있다. $\angle ACB = \frac{\pi}{6}$ 가 되도록 점 A를 잡고, 호 BC 위를 반시계 방향으로 움직이는 점 P에 대하여 선분 AP와 선분 BC가 만나는 점을 D라 하고, $\angle PBC = \theta$ 라 하자. 삼각형 BDP의 넓이를 $S(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta}$ 의 값을 구하시오. [4점]



30. $x \geq 0$ 에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$ 와 $f(x)$ 의 역함수 $g(x)$ 가 다음의 조건을 만족한다.

- (가) $x \geq 0$ 에서 $f'(x) > 0$ 이다.
- (나) $f(0) = 0, f'(0) > 1$ 이다.
- (다) $x \geq 0$ 에서 $G(x) = \int_0^x \{f(t) - g(t)\} dt$ 라고 할 때,
 $G'(x) = 0$ 를 만족하는 x 의 값은 0, 1, 3뿐이고,
 $G''(1) = 0, G''(3) < 0$ 이다.

$F(x) = \int_1^3 |f(t) - x| dt$ 라고 할 때, $F(x)$ 가 최솟값을 갖는 x 좌표를 α 라고 하면 $10[\alpha]$ 의 값을 구하시오.
 (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수이다.) [4점]

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.