실전력극대화를 위한

교과서 학습법

어떤 교재이든 가장 중요한 것은 자신의 성취 수준에 따라서 공부에 주안점을 두어야 할 부분이 다르다는 것이며, 교과서 역시 마찬가지입니다. 이런 점을 무시한 채 교과서는 일정한 수준에 이를 때 보아야 한다고 말하는 것은 '교과서를 어떻게 공부해야 할지 모르겠다.'고 하는 말에 불과한 것입니다.

> 다시 말하면 교과서는 어떤 수준이든 반드시 공부의 기본으로 삼아야 할 기본 개념서이고, 수준에 따라 어떤 면에 더 중점을 두어야 하는 것인지가 달라질 뿐입니다.

수능은 2점 문항이 객관식으로 3문항이 출제됩니다. 사실 이 글을 읽는 사람들 중 이런 사람이 없기도 하겠지만 이 문항도 해결하지 못하는 경우라면 이 글을 더 읽을 필요는 없습니다. 그 시간에 어떤 방법이든 가리지 말고 공부하시기 바랍니다.

3점 문항은 객관식이 4번~13번까지 10문항, 주관식이 22번~25번까지 4문항입니다. 주관식이 갖는 성질 때문에 문제의 난이도는 사실 객관식문항과 비교하자면 2점 문항과 3점 문항의 사이 정도라고 보아야 할 것입니다. 25번만 객관식을 기준으로 할 때는 객관식 3점 문항의 중간 수준의 난이도라고 할 수 있습니다. 물론 이런 분석은 다소 '통계적인 결론'이라고 할 수 있습니다. 난이도를 그렇게 해야 한다는 원칙은 당연히 없습니다. 그리고 현재 수능의 전체 난이도를 감안할 때에는 한 문항의 해결에는 평균적으로는 1분 30초 ~ 2분 정도에 해결해야 한다고 생각하면 적당할 것입니다. 문제를 해결하는 시간이 빨라야 한다는 것은 당연히 '틀리지 않으면서 가능한 한 빨리 해결해야 한다'라는 전제가 깔려 있습니다. 특히 '빠르게 해결한다.'는 것만 목표로 하면 맞힐 수 있는 문항을 실수로 틀리는 등 여러 가지 문제점이 나타날 가능성만 높아질 뿐입니다.

4점 문항은 객관식 14번 ~ 21번 문항, 주관식 26번 ~ 30번입니다. 이 문항은 두 가지로 성격을 구분할 수 있는데 21번, 29번, 30번 문항과 나머지문항으로 구분할 수 있습니다. 14번 ~ 20번까지 7문항과 26번 ~ 28번까지 3문항을 합하여 10문항의 평균 해결시간은 3분 내외로 정하면 무난할 것입니다. 남은 21, 29번은 문항 당 평균으로는 5분, 30번은 10분 정도 필요할 수도 있습니다.

이렇게 어느 정도 기준을 정하면 문제를 해결하는데 적정한 시간은 2점문항의 해결시간은 무시하면 30분 + 30분 + 20분 = 80분입니다. 남은 10분은 예비 시간 정도로 두면 될 것이고, 10분은 OMR등 처리시간 정도입니다. **검토할 시간**은 문항마다 평균적인 시간에서 남게 되는 시간이 자연스럽게 생겨난다고 보면 됩니다. 그런 시간을 검토 시간으로 생각하면 됩니다.

다음은 여러분들의 현 상황에 따른 레벨과 그에 따른 교과서 학습방법입니다. 매우 엄격한 객관적인 기준을 세우는 것은 개인차를 고려하면 불가능하기 때문에 어느 정도의 임의로 정할 수밖에 없었습니다.

> Level A : 3점 문항 14문항을 30분 내로 해결할 수 없는 학생
> Level B : 14번 ~ 20번까지 7문항과 26번 ~ 28번까지 10문항을 30분 내로 해결하지 못하는 학생
> Level C : 21, 29, 30번 3문항을 20분 내로 해결하지 못하는 학생

이 기준은 평가원 모의고사 같은 수준으로 적용하면 되고, 교육청 모의고사도 거의 비슷한 정도라고 보면 될 것입니다. 단 이른바 **사설모의고사**는 일률적으로 적용하긴 힘듭니다. 가령 **이정환 모의고사**는 수능과 비교할 때 객관적인 난이도가 더 높습니다. 따라서 이런 점을 감안해야 할 것입니다.

자신이 어떤 Level에 해당하는가는 제가 Level을 구분하는 취지를 고려하여 선택하면 될 것입니다. 그리고 목표를 어디에 둘 것인지도 중요합니다. 하지만 최소한 1등급 이상이 목표라면 30번을 처음부터 아예 제외하고 공부하면 '절대' 바람직하지 않습니다. 목표가 3등급 정도라면 이 글은 큰 의미가 없습니다. 이 글은 현재 수준이 어떠하든 목표가 2등급 이상, 사실은 1등급 그리고 그 이상일 때 비로소 가치가 있을 것입니다.

〈 Level A 〉 학생의 교과서 학습법

여기에 해당하는 학생이 주의할 점은 우선은 Level B가 되는 것이 목표라고 해도, 공부도 단계적으로 해야 하는 것은 아니라는 점입니다. 즉, 3점 문항의 해결에 필요한 것만 먼저 하고 일단 Level B에 도달하고 나서 그 '다음'공부를 하겠다는 생각 같은 것입니다. 예를 들어서 원래는 고3이 되었다면 이미 Level B는 되어 있어야 하는 것입니다. 무슨 말인가 하면 그런 식으로 공부하기에는 주어진 기간이 너무 짧다는 것입니다.

하루 평균 공부 시간을 늘린다고 해결되는 것이 아닙니다. 공부하는 것도 사실 '음식을 먹는 것'과 기본적인 이치는 같은 것입니다. '먹는 것'이 중요한 것이 아니라 '소화하는 것'이 중요 합니다. 따라서 이렇게 공부하지 말아야 하는 이유를 더는 말하지 않겠습니다. 그렇다면 해결책은 무엇일까요?

공부 시간을 배분해야 합니다. 3점 문항의 해결에 필요한 공부의 비중을 가령 7/10 정도로 하고, 4점 문항 중에 21, 29, 30번을 제외한 문항의 해결에 필요한 공부의 비중을 3/10 정도를 할애하는 것입니다. 사실 21, 29, 30번도 마찬가지이지만 이 3문항을 제외하면 4점 문항의 해결에 필요한 공부가 3점 문항의 해결에도 큰 도움이 됩니다. 그럼 이 수준에서는 교과서를 어떻게 공부해야 할까요?

12. 이차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\ln(x+1)} & (x\neq 0) \\ 8 & (x=0) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 구간 $(-1,\quad)$에서 연속일 때, $f(3)$의 값은? [3점]

① 6 ② 9 ③ 12 ④ 15 ⑤ 18

2014학년도 수능 이과 12번 문제입니다. 하지만 문과의 경우 주어진 $\ln(1+x)$대신에 가령 다항함수 $k(x)$정도가 제시되었다고 생각하고 받아들이면 될 것입니다. 이 문제는 3점문항의 수준에서는 정답률이 낮았던 문항입니다. 이 문항을 소재로 설명을 해보겠습니다.

문제해결에 필요한 기본개념은 '연속성'에 대한 이해입니다. 교과서를 보면 '연속성'에 대하여 설명하는 부분이 나옵니다. **이때 Level A의 경우 우선 중요한 것은 '정리된 결론'입니다. 물론 교과서의 본문은 무시할 수 없습니다. 하지만 Level A의 경우에는 '개념을 정확하게 이해한다거나 깊게 이해한다거나 하는 허세'를 부리지 말기 바랍니다.** 3점 문항도 해결을 못하고 있는데 '정확하게, 깊게'에 욕심을 내는 것은 바람직하지 않습니다.

본문을 읽어가기는 하되, 이해가 안 되는 부분을 표시해두고 과감히 건너뛰면 됩니다. 그리고 정리된 결론을 '받아들이면' 됩니다. 본문 내용이 모두 이해되면 더 좋긴 하겠지만 아직 본문 내용에 이해가 안 되는 부분이 있어도 3점 문항 수준은 해결이 가능합니다.

문제에서 연속함수의 성질을 적용하면 $x>-1$에서 $x\neq 0$이면 $y=g(x)$는 연속이고, $f(x)$는 이차함수 이므로 모든 실수에서 연속입니다. 따라서 $f(x)g(x)$는 $x\neq 0$일 때는 연속이 됩니다. (교과서에 정리된 연속함수의 성질)
이제 $x=0$에서 연속이 되도록 하면 됩니다. 이제는 연속의 정의에 의해서 하나씩 조건을 확인하면 됩니다.
함숫값도 정의되어 있고, 극한값도 존재하므로 결국에는 $\lim\limits_{x\quad 0} f(x)g(x)=f(0)g(0)$이 되면 됩니다.
$f(x)=x^2+ax+b$라고 둘 수 있으므로 $f(0)g(0)=(b)(8)=8b$이고 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+ax+b}{\ln(x+1)}$입니다.
여기서 한 가지 더 알아야 할 부분이 있습니다. 교과서 본문 내용에 해당하는 것은 '극한의 기본성질'입니다.
무슨 말인가 하면 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{q(x)}{p(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0} q(x)}{\lim\limits_{x\to 0} p(x)}$와 같이 계산할 수 있는가를 따져보아야 합니다. 교과서에 정리된 극한의 기본성질에 의하면 $\lim\limits_{x\to 0} p(x)=0$이면 그렇게 구할 수 없습니다.

그런데 본문 내용에는 다음과 같은 내용이 있습니다.

$$“\lim_{x \to a} \frac{q(x)}{p(x)} = \alpha \text{이고 } \lim_{x \to a} p(x) = 0 \text{이면 } \lim_{x \to a} q(x) = 0 ”$$

이에 대한 증명이 같이 나옵니다. 역시 증명 과정은 이해가 안 될 수도 있습니다. **그러면 우선은 이 결론을 적용하여 문제를 해결하면 됩니다.** 그리고 또 한 가지는 이것은 교과서에서는 정리해서 요약하고 있는 것은 아닙니다. 앞의 연속함수의 성질, 연속의 정의, 극한의 기본성질 등은 '본문 내용'을 정리하여 '이상을 정리하면, 일반적으로' 이런 식으로 '정리되어 있다면' “ $\lim_{x \to a} \frac{q(x)}{p(x)} = \alpha$이고 $\lim_{x \to 0} p(x) = 0$이면 $\lim_{x \to 0} q(x) = 0$ ”은 본문에 서술되는 정도입니다. 어떻게 이런 성질이 '요약정리'된 경우와 단순하게 서술만 된 경우의 차이는 있습니다. 하지만 이런 차이에 대해서는 심지어 Level C의 경우에도 이해할 필요는 없습니다. 그런 차이에 대해서는 저와 같이 가르치는 사람이 이해해야 할 부분일 뿐입니다. 따라서 **본문과 본문에 정리된 내용만으로는 3점 문항을 해결하기 위하여 부족한 부분이 있습니다.**

그런데 교과서에는 '예제'가 있습니다.

“ $\lim_{x \to a} \frac{q(x)}{p(x)} = \alpha$이고 $\lim_{x \to 0} p(x) = 0$이면 $\lim_{x \to 0} q(x) = 0$ ” 설명에 이어지는 예제는 다음과 같은 것입니다.

예) 다음 등식이 성립하도록 상수 a, b의 값을 구하여라.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} = 5$$

이 문제를 해결하려면 위의 성질을 이용해야 하며, 2014학년도 12번 문항의 해결을 위해서도 이 성질을 이용해야 합니다.

그리고 문제를 해결하는 과정은 이제 완전히 같아집니다.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + ax + b}{\ln(1+x)} = 8b \text{이고, } \quad \lim_{x \to 0} \ln(1+x) = 0 \text{이므로, } \lim_{x \to 0} (x^2 + ax + b) = 0 \text{ 즉 } b = 0$$

이제 이를 적용하면 최종적으로 문제는 다음과 같이 변합니다.

$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + ax}{\ln(1+x)} = 0$, 그리고 이 문항은 2점 문항 수준입니다.

어떻게 교과서를 공부해야 할 것인지 이해됩니까?

Level A에서는 교과서에 '정리된 결론'과 '예제'문제를 해결하는 방법을 아는 것이 중요하며, 급한 공부 과제입니다. 정리된 결론에 이르기까지 '과정'에 대한 이해는 노력을 하되, 집착하지 말아야 하며 '예제 문제'를 푸는 방법도 마찬가지입니다.

그리고 이 방법 외에 다른 방법을 익히는 것은 모두 부질없는 것입니다. 특히 교과서에 없는 방법은 수학적으로 의미가 있거나 말거나, 가령 수학을 매우 잘하는 사람이 추천하거나 말거나 여러분 자신에게는 하나도 중요한 것이 아닙니다.

제가 보기에는 이상하게도 우리 사회에는 '모 아니면 도' 식의 사고방식이 많은 듯합니다. 그래서 Level A의 경우에는 결론에 이르는 과정은 무조건 무시하고 결론부터 암기하는 것이 필요하다고 하는 경우도 있고, 반대로 결론보다는 과정이 중요하기 때문에 과정을 꼼꼼하게 이해하고 넘어가야 한다는 말도 있는데, 이는 모두 한 쪽에 치우친 생각일 뿐입니다.

과정에 대한 이해를 위한 노력을 하되, 그것에 집착하지 않는다. 이해되면 좋고, 안되면 안 되는대로 우선은 결론

을 적용하여 문제를 풀어가면서 생각하라. 이것이 Level A의 경우 교과서 학습에서 주안점을 두어야 하는 부분입니다.

그리고 이 단계에서는 교과서의 문제와 기출문제에서 3점 문항 정도면 문제'양'은 충분합니다. 굳이 더 많은 양의 문제를 소재로 훈련할 필요는 없습니다. 문제야 물론 많으면 많을수록 좋지만, 이 단계에서 머무를 것은 아니기 때문입니다. 또 이 단계에서 앞서도 말한 것처럼 기출문제의 4점 문항 등은 아예 무시하는 것도 좋은 방법이 아닙니다. 물론 이 비율은 어디까지나 예시일 뿐이지만 대략 7:3 정도의 비율로 21,29,30번 급이 아닌 4점 문항은 풀어보아야 합니다.

예를 들어

21. 함수

$$f(x) = \begin{cases} a(3x - x^2) & (x < 0) \\ x^3 - ax & (x \geq 0) \end{cases}$$

의 극댓값이 5일 때, $f(2)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

이 문항은 2014학년도 6월 수학 A형 21번 문제입니다. 당연히 아직 풀 수 없어도 관계가 없습니다. **이 문제를 풀기 위하여 노력해보는 것 자체로 3점 문항을 해결하는 능력이 발전합니다.** 뿐만 아니라 3점 문항을 해결하는데 그치지 않고 조금씩 4점 문항의 해결도 가능하게 발전시켜줍니다. 이런 과정을 거쳐서 결국 여러분은 목표에 도달할 수 있게 될 것입니다.

〈 Level B 〉 학생의 교과서 학습법

Level B라면 Level A의 경우 교과서를 어떻게 공부해야 하는가에 대한 앞의 글에서 그 다음 단계에서는 어떻게 하라고 하는지에 대해서 어느 정도는 짐작이 될 것입니다. 역시 구체적인 문제를 소재로 그 내용을 정리해보도록 합시다.

21. 좌표평면에서 두 함수

$$f(x) = 6x^3 - x, \quad g(x) = |x - a|$$

의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은? [4점]

① $-\frac{11}{18}$ ② $-\frac{5}{9}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{4}{9}$ ⑤ $-\frac{7}{18}$

이 문항은 2013학년도 9월 수학 나형 21번 문제입니다. 문과와 이과의 공통부분에 해당하는 문제를 선정할 필요가 있어서 나형 문제를 소재로 했습니다. 최근 나형 문제의 난이도는 21, 30번을 제외하고는 너무 낮은 수준인 경향도 있어서 조금은 오래된 문제를 소재로 했습니다. 역시 정답률이 낮았던 문항입니다. 3점 문항의 해결이 가능한 수준이라면 문제가 요구하고 있는 내용 중 '그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는'에 해당하는 내용 이해는 어려움이 없을 것입니다. 뿐만 아니라 $y = f(x)$와 $y = g(x)$의 개형을 그리는 것도 가능할 것입니다.
그럼에도 문제 해결의 방향을 결정하는데 혼선이 발생할 수는 있습니다.

1) $y = f(x)$와 $y = g(x)$의 그래프 개형을 이용하여 문제를 해결할 것인가?
2) 문제가 요구하는 것은 $6x^3 - x = |x - a|$ 방정식의 서로 다른 실근이 2개가 되도록 하는 것이므로 이 식을 변형하여 $6x^3 - x - |x - a| = 0$ 라고 두고 이제 $x \geq a$일 때와 $x < a$일 때로 나누어서 $y = 6x^3 - x - |x - a|$의 그래프를 그려서 해결할 것인가?

하는 고민입니다. **사실 이 수준에서는 극단적으로는 '모르는 게 약'이라고 지나치게 많은 내용을 '알고' 있으면 오히려 이렇게 문제를 해결하는 방향을 결정할 때 혼란만 더 커질 수도 있습니다.**

특히 교과서를 기본서로 학습하지 않는 경우라면 더욱 주의해야 할 점이 있습니다. 이 글의 전편에 해당하는 글 "교과서는 수능학습의 유일한 기준"이라는 글에서 말씀드린 것처럼 교과서에 있는 개념, 성질, 법칙 등을 뛰어넘는 어떤 추가적인 개념, 어떤 추가적인 정리, 따름 정리 등등을 알고 있는 상태에서 **어떤 것은 교과서에 나와 있는 내용이고, 어떤 것은 교과서에는 없는 내용인지 구분할 수 없다면 이런 혼란의 극복은 생각보다 어렵습니다.**

4점 문항이 갖는 특징이 있는데, 이를 간략하게 요약하긴 어렵습니다만 간단하게 정리하면 결국에는 '문제를 해결하는 능력'을 평가하는 면이 크다는 것입니다. 최근 난이도에서는 21, 29, 30번 같은 문항을 제외하면 '암기식으로, 기계적으로' 해결할 수 있는 면이 커지긴 했지만 본질적으로는 그렇지 않습니다. 뿐만 아니라, 문제를 해결하는 능력으로 해결하면 될 것을 '암기식으로, 기계적으로' 해결하려고 하니 공부할 분량은 급증하게 되고, 어지간한 노력으로는 해결이 안 되는 현실적인 어려움을 많이 겪는 것입니다.

정리하면, **Level B에서는 문제를 해결하는 방향의 '기준'을 명확하게 알기 위해서 교과서를 공부하는 것이 필요합니다. 즉, 그런 방향으로 교과서를 학습해야 합니다. 그럼 어떻게 교과서를 학습해야 할까요? Level A에 대한 글을 읽으면 충분히 짐작이 가능한 공부 요소. 본문에 대한 정확한 이해, 예제 문제 풀이 절차에 대한 정확한 이해가 그것입니다.**

이 수준에서는 교과서에 정리된 결론이나, 예제 문제를 푸는 방법은 이미 알고 있는 상태입니다. 이제 '왜'라는 질문을 던질 수 있어야 합니다. 일단 이 문제와 연관된 교과서의 내용과 예제를 보도록 하겠습니다.

첫 번째는 '접선'이 갖는 기하학적 의미입니다. 미분법이란 '곡선'에 대해서 '직선'을 통한 기하학적파악을 위해 만들어진 수학적 개념입니다. 그리고 이러한 내용은 교과서의 본문을 꼼꼼하게 읽어서 이해하지 않으면 알기 어려운 것입니다.

주어진 문제를 해결하려면 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 위치관계를 알 수 있어야 합니다. 그런데 $y=g(x)$는 직선의 개형을 갖고 있지만 $y=f(x)$는 곡선의 개형을 갖고 있습니다. 따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$의 위치관계를 알기 위해서는 우선은 $f'(x)=\pm 1$을 이용하여 $g(x)$와 같은 기울기의 접선을 '보조직선'으로 그릴 수 있어야 합니다.

이런 발상은 교과서의 내용을 '결론'만 받아들이고, '왜'라는 질문 없이 기계적으로 문제를 해결하는 방법으로는 생겨나지 않습니다. 물론 이런 '발상' 자체도 누군가 가르쳐줄 수는 있습니다. 따라서 이런 의미에서 이런 '발상'에 대해서 잘 정리된 어떤 교재, 어떤 인강의 도움을 얻을 수는 있습니다. 하지만 근본적인 해결책은 되지 않으며, 스스로 깨우치고 이해할 수 있는 부분조차도 그런 교재, 인강을 통해서 해결하려고 하면 역시 현실적으로 만만하지 않은 학습 부담이 생겨납니다.

스스로 이해하고, 해결할 수 있는 부분은 해결해가면서 정 해결이 안 되면 그런 교재나 강의의 도움을 얻는 것 하고는 큰 차이가 있습니다. 뿐만 아니라 누군가의 도움으로 이 단계에서 미션을 해결하여 이제 21, 29, 30번의 해결을 목표로 하는 단계로 넘어갔다고 해도, 거기에 한없이 정체될 가능성만 큽니다. 그리고는 아마도 결국 21, 29, 30번은 수학적 재능이 있어야 하는 것이라고 애써 자기 위안이나 하고 있을 가능성이 큽니다.

이 단계에서는 기출문제의 4점 문항은 좋은 공부의 재료가 됩니다. 교과서가 중요하다고 교과서만 계속 반복하여 본다고 어떤 내용이 어떻게 문제를 통해서 드러날 것인지 짐작하기는 어렵습니다. **반대로 기출문제의 4점 문항을 소재로 하면서 이 문제를 해결하기 위해서 필요한 것이 무엇인지를 교과서를 보면서 발상을 떠올리는 것이 중요합니다. 즉, 문제를 보고 교과서를 보면서 문제 해결의 발상을 떠올리는 것입니다. 간단하게 생각하면 됩니다. 일종의 Open Book으로 시험을 본다. 단 Open 할 수 있는 교재는 교과서이다.**

예제 문제를 해결하는 절차에 대해서도 마찬가지입니다. 다음 두 문제를 보도록 하겠습니다.

예제1) 방정식 $x^3-3x=a$가 서로 다른 세 실근을 갖기 위한 실수 a의 범위를 구하라.

예제2) $x\geq 0$일 때, $x^3+2>x^2+x$가 성립함을 증명하여라.

앞의 문제는 식을 변형하지 않고 해결하는 것이 간단하며, 뒤의 문제는 식을 변형하여 해결하는 편이 간단합니다. 문제를 해결하는 여러 방법의 본격적인 비교는 생략하겠습니다. **그런데 그런 방법을 일단 받아들이는 것에 그치는 것이 아니라, 이제는 '왜'라는 의문을 갖고 그것에 대해서 생각해보아야 합니다.**

21번 문제를 식을 변형하여 $6x^3-x-|x-a|=0$ 라고 두고 해결할 수는 있습니다. 그런데 이렇게 되면 시험을 볼 때 해결하기 힘들 정도로 복잡해져버립니다. 이렇게 되는 이유는 문제를 해결하는 방법을 암기식으로, 기계적으로 공부하기 때문입니다. 그렇게라도 문제를 해결하는 것이 필요한 경우가 있지만 그것은 철저하게 교과서 수준에서, 그리고 Level A의 수준에서나 그런 것입니다.

사실 학습의 성취수준이 이 단계에 있을 때의 공부가 가장 어려운 점이 있습니다. 스스로 깨우치고, 경험하면서 터득해야 할 부분이 많기 때문입니다. 교과서는 그것이 가능하도록 만들어진 수학책입니다. 그래서 이런 면을 간과하면, 교과서는 '불친절'한 책이 되어버립니다. 기출문제를 소재로 하는 어떤 교재, 어떤 인강은 '친절한' 교재, 강의가 됩니다. 앞에서도 말씀드렸지만 이렇게 해서 어찌 어찌 21, 29, 30번을 제외한 문항을 맞혀갈 수는 있습니다. 그런데 매번, 언제나, 항상 21,29,30을 제외하고는 모두 맞힐 수 있는 경우는 생각보다 어렵다는 것을 알게 됩니다. 그리고 틀린 문제는 풀 수 있었는데 틀렸다. 실수해서 틀렸다. 이런 식으로 위안을 삼고 있을 뿐입니다.

Level A에서도 말했지만 양극단은 좋은 것이 아닙니다. 남의 도움을 받지 말아야 한다는 것도 지나친 것이고, 특별한 재능이 없으면 혼자서는 깨우칠 수 없으니 반드시 남의 도움을 받아야 한다는 것도 틀린 생각입니다. **그렇다면 중요한 것은 자기 자신의 능력과 변화가능성을 믿고 스스로 해결할 수 있는 최대한을 해결해야 한다는 것입니다.** 그리고 그것으로 부족함이 있다면 다른 사람의 도움을 받을 수는 있는 것입니다. 사실 시간이 충분하다면 무조건 스스로 해결하는 것이 가장 좋습니다. 하지만 현실적인 수능 공부 기간은 제한된 것도 분명한 사실입니다.

예를 들어, 어떤 인강의 개념 강의가 있다면 보통은 그것을 처음부터 끝까지 수강하는 경우가 많습니다. 결론적으로 좋은 선택이 아닙니다. 교과서를 이용하여 스스로 해결해가면서 해결이 되는 부분은 다른 교재, 인강을 참조할 필요가 없습니다. 일정한 기간을 두고 해결이 안 되면, 그런 내용만 그런 부분만 보조적으로 다른 교재나 인강을 이용할 수는 있는 것입니다. 말하자면 **교과서가 아닌 그런 것들은 일종의 '참조서적', '참조할 수 있는 사전'과**

같은 것일 뿐입니다.

정리하면 이렇습니다. 요즘 기출문제는 워낙 일찍 공부하는 경향도 있어서 스스로 문제 해결을 고민할 수 있는 문항이 남아있지 않은 경우도 있습니다. 그런 경우는 기출문제가 아니어도 스스로 문제 해결을 고민할 수 있는 문항이, 소위 말하는 '평가원표'보다 품질이 조금 떨어져도 훨씬 더 좋은 공부의 소재입니다. 따라서 우선적으로 기출문제의 4점 문항 그리고 그러한 수준의 문항을 소재로 교과서를 Open Book으로 풀면서 교과서를 반복하여 참조한다.

나아가서 풀 수 있는 기출 문제의 4점 문항도 그 문제에 요구되는 개념, 접근방향, 발상의 근거 등을 교과서를 통하여 계속 찾아나간다. 필요하다면 기출문제를 소재로 하는 어떤 교재, 어떤 인강을 최소의 수준에서 부분적으로 참조한다.

〈 Level C 〉 학생의 교과서 학습법

어떤 경로로 도달하였든 Level C에 온 경우라면 마땅히 그 노력을 칭찬받을 만합니다. 하지만 또 어떤 경로로 Level C에 도착했는가에 따라 이 단계의 목표의 성취에 큰 영향을 줍니다. 여기서 제가 말씀드린 경로로 **Level C에 도착했다면 사실 이제 필요한 것은 '문제의 훈련 난이도와 양'을 늘리는 것으로 충분합니다.**

이미 교과서를 어떻게 활용할 것인지에 대한 방법도 여기서 말씀드리는 수준 이상으로 자기 것으로 만들어져 있으며, 교과서에 쓰인 내용에 대한 이해도 충분할 것이기 때문입니다.

> **남은 것은 본격적으로 그래도 부족한 문제해결능력을 키우는 것입니다. 역설적으로 이런 상황에서는 교과서는 필요할 때, 한번 씩 참조하면 되는 정도이고 이에 대해서 무슨 특별한 비법을 고민할 필요도 없을 것입니다.**

그런데 실제로는 교과서를 중심으로 해서 이런 단계에 이른 경우보다는 그렇지 못한 경우가 많을 것입니다. 이런 조건에서는 교과서를 어떻게 공부해야 하는가? 이제 이런 점에서 생각해보기로 하겠습니다.

30. $x>a$에서 정의된 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.
(단, a는 상수이다.)

(가) $x>a$인 모든 실수 x에 대하여 $(x-a)f(x)=g(x)$이다.
(나) 서로 다른 두 실수 α, β에 대하여 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 동일한 극댓값 M을 갖는다. (단, $M>0$)
(다) 함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수보다 많다.

$\beta-\alpha=6\sqrt{3}$일 때, M의 최솟값을 구하시오. [4점]

이 문항은 2017학년도 수능 가형 30번입니다. 이과 문제이지만 문과생도 해결하기는 어려워도 설명을 위한 소재로는 이해는 할 수 있을 것입니다. 역시 정답률이 낮았던 문항입니다. 문과의 경우에도 30번 문항은 언제나 낮은 정답률을 보이고 있습니다. 나형/가형에 따라 21, 29, 30번 문항의 특징은 약간은 다른 면은 있습니다.

> **이 글은 교과서의 공부 방법에 관한 글이기 때문에, 나형/가형의 최고 난이도 문항의 성격 차이에 대해서는 자세히 다루지는 못합니다. 하지만 공통된 점은 '결국 문제를 해결하는 능력'이 없으면 해결하기 어렵다는 것입니다.**

높은 난이도의 문항의 특징은 문제를 해결하기 위해서 필요한 기본개념 성질은 오히려 가장 간명하다고 할 수 있다는 것입니다. 이 문항의 경우에도 문제를 해결하기 위해서 알아야 할 개념은 미분 단원의 가장 기본적인 내용에 불과합니다. 그래서 사실은 이 문항의 풀이가 제시된다면 '풀이를 읽어서 이해하는 것'은 어렵지 않습니다. 이 문제의 풀이를 읽어서 이해하기 어렵다면 풀이가 논리적인 비약을 갖고 있는 경우이거나 그렇지 않은 경우라면 성취 수준이 Level C에는 이르지 못한 경우일 뿐입니다. **중요한 것은 '풀이'를 이해할 수는 있지만, 스스로는 그러한 풀이를 생각해내지 못하고 끝까지 마무리하지 못한다는 사실입니다.**

이 단계에 이르면 교과서를 보는 것의 필요성도 어느 정도는 알게 됩니다. 수학 실력이 어느 정도 수준에 이른 상태이므로 교과서를 보면 매우 새롭게 느껴지는 부분도 많습니다. 이런 이유 때문에 교과서는 어느 정도 실력이 있어야 볼 수 있다는 전혀 근거가 없는 말이 그럴듯하게 들리기도 합니다. 교과서든 무엇이든 실력이 있으면 그 자체로 실력이 부족할 때에 비하여 어떤 책을 보아도 새롭게 느껴지는 것일 뿐입니다. 실력을 높여서 교과서를 보아

야 한다면, 실력이 부족할 때부터 계속 반복하여 보면 되는 것일 뿐입니다.

그런데 이 단계에서는 소위 말하는 교과서의 행간을 멋대로 해석하고 판단하는 경향이 생겨납니다.

기출문제의 출제경향도 자의적으로 판단하고 해석합니다. 말하자면 좀 안다고 해서, '있는 그대로' 보지 못합니다.

'객관적'으로 보는 것이 아니라, '주관적'으로 판단합니다. 21,29,30번 문항을 맞힐 수 없는 조건에서의 '주관적 판단'이란 결국에는 그 수준을 벗어날 수 없는 악순환을 낳을 뿐입니다.

교과서를 기준으로 하여 자신이 알고 있는 것을 '체계적으로 정리하는 것'이 필요합니다. 이때 교과서를 '있는 그대로' 인정을 해야 합니다. '숨겨진 뜻'이 있다거나 하는 비약을 경계해야 합니다.

(가) 조건은 우선은 있는 그대로 받아들이면 됩니다. 식을 변형할 필요가 전혀 없는 것은 아니지만, 우선은 있는 그대로 해석하는 것이 먼저입니다. 그런데 자꾸 문제 해결에 대한 계획도 없이 식을 변형하려고 합니다. 어떤 선입관이 있기 때문입니다. 있는 그대로 받아들이면 복잡해질 어떠한 이유도 없는 조건일 뿐입니다.

(나) 조건 역시 마찬가지입니다. 교과서에 의하면 이 조건이 의미하는 것은 $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$이고, $f(\alpha)=f(\beta)=M$ 입니다. 단지 이것일 뿐입니다. 이 조건을 어떻게 이용할 것인지는 문제가 묻고 있는 것, 그리고 여러분이 문제 해결의 과정을 생각하면서 선택하고 결정해야 하는 것이지, 이 조건을 이용하는 기계적인 어떤 방법이 있는 것이 아닙니다.

(다) 조건 역시 있는 그대로 받아들이면 됩니다. 무슨 '숨겨진 엄청난 의미'를 갖고 있다는 식으로 해석하는 것이 지나친 비약입니다. 그저 함수 $g(x)$의 극값이 가령 2개라면 함수 $f(x)$의 극값은 3개 이상임을 뜻하는 것일 뿐입니다.

중요한 것은 이런 조건에 대한 심오한 해석이나, 주어진 식의 절묘한 변형이나, 교과서에 행간으로 숨겨진 개념의 심화 이해가 아닙니다. 문제를 선입관이나 편견 없이 있는 그대로 해석하고, 교과서에 있는 내용을 적절하게 이용하여 문제를 해결하는 과정을 계획하고 시험을 보는 조건에서 침착하게 계산하고 답을 구하는 것이 중요할 뿐입니다.

교과서를 기준으로 하여 자신이 공부해온 내용이 체계적으로 정리되어 있으면 이와 같은 문제를 스스로 복잡하게 만들지 않게 됩니다.

문제가 묻고 있는 것은 M에 대해서 묻고 있으므로 $f(x)$의 극댓값의 최솟값을 구할 것인지, 아니면 주어진 조건을 이용하여 사차함수 $g(x)$를 추론하고 나서 M은 $g(x)$에서는 어떻게 나타나는지를 결정하면 될 것이라고 생각하면 됩니다. 교과서를 기준으로 하여 알고 있는 것이 정리되어 있으면 이 이상의 생각은 필요하지 않습니다. 그런데 **이런 저런 교과서에 없는 내용들 때문에 이런 생각보다 훨씬 복잡한 이런 저런 생각을 합니다. 문제 해결을 스스로 복잡하게 만드는 것입니다.**

(가) 조건을 이용하여 $g'(x)$를 구하여 봅니다. 왜냐하면 삼차이상의 함수를 파악하는 기본은 그 도함수를 이용하는 것이기 때문입니다. $g'(x)=f(x)+(x-a)f'(x)$입니다. 그러니 굳이 (가) 조건식을 변형해야 할 필요가 아직까지는 필요하지 않습니다. 그리고 (나) 조건을 이용하면 이제 $g'(\alpha)=g'(\beta)=M$임을 알 수 있습니다. 그럼 이것이 의미하는 것은 무엇일까요? 역시 교과서를 기준으로 한다면 두 가지 중의 하나의 선택만 있을 뿐입니다. $y=g(x)$에서 접선의 기울기가 M이라는 선택이 있고, $y=g'(x)$에서 $g'(x)=M$이라는 방정식의 실근이 α , β라는 것입니다.

이 문제의 풀이는 이제 (다) 조건을 $y=g(x)$의 그래프 개형을 생각하거나 $y=g'(x)$의 그래프 개형을 생각해서 해결하면 됩니다. 역시 교과서의 내용을 '체계'있게 정리했다면 이 때 기본은 항상 $y=g'(x)$를 이용하여 $y=g(x)$를 생각한다는 것입니다. 따라서 문제의 난이도는 객관적으로는 $y=g'(x)$의 개형을 이용하는 편이 간단하게 되어 있을 가능성이 큰 것입니다.

특히 교과서를 기본으로 하면서 Level C에 이른 경우가 아니라면 알고 있는 내용이 매우 복잡, 다양한 상태일 가능성이 큽니다. 이때 교과서를 보고 자신이 알고 있는 복잡 다양한 내용을 교과서의 재해석이라고 착각하면서 정당화하고 있다면 교과서를 볼 이유가 거의 없습니다. 반대로 교과서를 기준으로 알고 있는 것을 '정리'해야 합니다.

교과서의 내용적인 순서대로 알고 있는 것을 재구성하고, 교과서에 없는 내용은 교과서에 있는 내용으로부터 이끌어내는 과정을 이해하고, 그 과정을 재현할 수 있으면 과감히 버리면 됩니다.

왜냐하면 필요하면 이제는 교과서에 있는 내용으로부터 이끌어내면 될 것이기 때문입니다.

이런 방식으로 문제를 통해서 교과서를 기준으로 정리한 개념, 공식, 성질의 적용을 반복하면서 '문제 해결 능력'을 길러 가면 됩니다.

물론 이런 과정에서 교과서에 없어도 어떤 성질, 정리 등은 매우 빠르게 재현할 수 있게 될 것입니다.

가령 이 문제의 경우에 만약에 $y=g(x)$의 개형으로부터 문제를 해결해간다면 $y=Mx+k$라는 직선과 $y=g(x)$는 $(\alpha, g(\alpha))$ $(\beta, g(\beta))$에 접하고 있는데, 이런 상황을 식으로 표현할 때에는 $g(x)-(Mx+k)=-(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$이라고 둘 수 있다는 사실을 교과서에 있는 내용으로부터 빠르게 이끌어낼 수 있게 됩니다. 사실 $y=g'(x)$의 개형을 이용하면 더욱 간단하게 해결할 수 있기는 있습니다. 기출문제의 난이도가 높았던 문항을 비롯하여 요즘은 어렵지 않게 구할 수 있는 난이도가 높은, 복잡한 문항을 이런 식으로

교과서를 기준으로 알고 있는 것을 정리하면서 풀어보는 과정을 반복하면 비로소 21, 29, 30번 문항을 해결할 수 있는 능력이 커질 것입니다.

이 글은 교과서를 각각의 수준에 맞게 어떻게 공부해야 할까에 관련된 글입니다. 그리고 그것은 교과서만 공부해야 한다는 것은 당연히 아닙니다. 교과서는 이렇게 공부해야 한다는 것입니다. 병행하여 공부해야 할 최소의 범위는 기출문제와 EBS 연계 교재입니다. 이제 다음 편부터는 그것에 대해서 말씀드리도록 하겠습니다.

아무쪼록 이 글의 취지와 내용을 잘 이해해서 교과서를 제대로 공부할 수 있게 되길 바랍니다.