2021학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가 분석

들어가기 전에

올해 첫 평가원 모의고사를 보느라 모두들 수고 많으셨습니다. 작년 수능의 비킬러는 어렵게, 킬러는 쉽게 출제하는 기조가 이어지고 있지만, 이제는 아예 킬러와 비킬러의 구분이 없어진 것 아닌가 싶습니다. 특히, 확률과 통계에서 고난이도 문항이 출제되면서, 그동안 쉬운 분야였던 확률과 통계가 가장 큰 변별을 했을 것이라 생각합니다. 아직은 풀이도, 등급컷도 안 나온 상황이지만, 어려운 시험인 만큼 등급컷은 많이 낮을 것이라 생각됩니다.(1컷이 아닌 아래 등급컷) 이제는 앞으로, 변화하는 수능에 맞추어 대비해가는 공부가 필요할 것 같습니다.

1. 평범한 2점 문항이었습니다.

2. 평범한 2점 문항이었습니다.

3. a_2, a_3를 각각 r, r^2으로 놓고 이차방정식을 풀어야 하는, 간단한 문제입니다. 하지만 기존의 3번 문제에 비해서는 조금 까다로운 것 같네요. 여기서부터 전체적인 난이도의 향상이 이루어졌다는 것이 느껴집니다.

4. 같은 것이 있는 순열 문제입니다. 평범합니다.

5. 새로 추가된 급수 부분입니다. 이렇게 급수의 값이 수렴하는 경우, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$으로 바꿔서 푸는 것에 익숙해져야 할 것 같습니다. 그 다음에는, $a_n=0$이라고 생각하고 풀어도 상관없을 것 같네요.

6. log의 밑변환 공식을 자유자재로 다룰 수 있는지 묻는 문제입니다.

7. 분모와 분자에 x^n꼴이 들어가 있는 극한 문제는, $-1<x<1$범위일 때와 아닐 때로 나누어서 푸는 것이 중요합니다. 이 문제의 경우 $\frac{x}{4}=-1,1$일 때만 잘 따져주면 될 것 같습니다.

8. 원 모양의 탁자에 학생들을 배치하는 경우는, 무조건 특정 학생을 고정하는 것이 핵심입니다. 이 문제의 경우 제 풀이는 다음과 같습니다.
   아래 2칸에 1학년 학생 2명을 고정합니다. 그러면 1학년 학생 2명을 배열하는 경우는 2가지입니다.(둘이 자리를 바꾸는 경우) 그러면 이제 남은 칸은 5칸이 되고, 5칸에 2학년 학생 2명, 3학년 학생 3명을 2학년 학생끼리 이웃하게 배열하는 아주 쉬운 문제가 됩니다.

9. $\log_{\frac{1}{2}}x$가 감소함수라는 것을 파악하면, 쉽게 풀리는 문제입니다.

10. 평범한 극한 문제인데, 문제에서 극한 문제라는 것을 숨겨놓은 케이스입니다. 일단, a를 구하기 위해 $x=0$을 대입합니다. 그렇게 되면 $a=4$로 구해집니다. 그렇게 되면 $f(x)=\dfrac{4-4\cos(\frac{\pi}{2}x)}{(e^{2x}-1)^2}$꼴이 됩니다. 이 함수가 실수 전체의 집합에서 연속이기 때문에, 0에서의 극한을 구해주면 됩니다.

11. 이것도 평범한 문제입니다. $g'(x)$를 구하기 위해 무작정 양변을 미분하면 $f'(0)-f(0)$ 꼴이 나와 자연스럽게 구할 수 있습니다.

12. 양수의 홀수제곱근은 양수, 양수의 짝수제곱근은 양수와 음수, 음수의 홀수제곱근은 음수, 음수의 짝수제곱근은 없다는 것을 이용하면 쉽게 풀 수 있습니다. 물론 네 가지 경우가 모두 나와 실수를 유발하기 쉬운 문제인 것 같습니다.

13. 어차피 경우가 12개밖에 안 돼서, 그냥 세면 됩니다. 특별한 방법 없습니다. 굳이 조금 더 간단하게 하자면 포함과 배제의 원리를 쓰면 되는데, 이거 써도 비슷합니다.

14. 실근을 가지는 경우니까, 판별식을 써주면 됩니다. 판별식을 쓰면 $\sin\theta \geq \dfrac{1}{2}$이 나옵니다. 그래프를 그려 범위를 구해보면 됩니다.

15. 아주 오랜만에 평가원에 출제된 수학적 귀납법 문제입니다. 수열의 합을 증명할 때에는 주로 수학적 귀납법을 이용하기 때문에, 이 문제에서 헤메셨다면 방법을 반드시 외워두는 것이 중요할 것 같습니다.

16. 두 그래프가 주어져 있는데, 지수가 $3t$만큼 차이납니다. 그 말은, 두 번째 곡선은 $y=e^{\frac{x+6t}{2}}$라는 것이고, 첫 번째 곡선을 x축 음의 방향으로 $6t$만큼 평행이동 시킨 것이라고 볼 수 있습니다. 그러므로 QR의 길이를 $6t$라고 바로 구할 수 있습니다. 따라서 PQ의 길이도 $6t$가 됩니다.

PQ의 길이는 $e^{\frac{k}{2}+3t}-e^{\frac{k}{2}}=6t$로 표현할 수 있기 때문에, 이를 이용해 $f(t)$를 구해보면 $f(t)=2\ln(\dfrac{6t}{e^{3t}-1})$이 나옵니다.

17. 까다로운 문제입니다. 4와 5가 이웃한 경우와 그렇지 않은 경우를 나눠줘야 합니다. 4와 5가 이웃한 경우는 4쪽에는 6또는 7, 5쪽에는 1, 2, 3중 하나가 들어가야 합니다. 경우의 수는 $2\times2\times3\times4!=12\times4!$가지입니다.
4와 5가 이웃하지 않은 경우에는 4양쪽에 6, 7이 있고, 5양쪽에는 1, 2, 3중 2개가 들어가 있는 꼴이 나올 것입니다. 경우의 수는 $2\times3\times2\times3!=12\times3!=3\times4!$이 됩니다.
총 경우의 수는 $\dfrac{15\times4!}{7!}=\dfrac{15}{210}=\dfrac{1}{14}$

18. 역시나 고난도 문제입니다. 물론 답이 5번이기 때문에, 정답률이 낮지는 않겠지만, 엄청 까다로운 문제임은 분명합니다.
ㄱ부터 어렵습니다. 우선 그래프를 그려보면, 대충 x_2가 $\dfrac{1}{2}$근방, x_1은 -1보다 크고 $-\dfrac{1}{2}$보다 작다는 것이 보일 것입니다. x_2와 $\dfrac{1}{2}$을 비교하려면 결국, $2^{\frac{1}{2}}, -2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+2$를 비교하면 된다는 것을 알 수 있습니다. 계산해보면 오른쪽이 더 크고, 그러므로 $x_2>\dfrac{1}{2}$임을 얻어낼 수 있습니다.
ㄴ은 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}>1$인지 확인하는 문제입니다. 이 값은 평균변화율이므로, 평균값의 정리를 활용하는 것을 생각해볼 수 있습니다. 하지만 그렇게 안 풀립니다.(이 문제가 어려운 이유입니다.) $y_2=-2x_2^2+2, y_1=-2x_1^2+2$로 두면, $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-2(x_2+x_1)$이 나옵니다. 여기서 $x_1+x_2>-1+\dfrac{1}{2}(\because ㄱ)$이기 때문에 ㄴ이 참이 됨을 알 수 있습니다.
ㄷ은 $y_1y_2=2^{x_1}2^{x_2}=2^{x_1+x_2}$로 바꾸는 것이 중요합니다. 이렇게 되면 쉽게 풀 수 있습니다.
따라서 답은 ㄱ, ㄴ, ㄷ입니다.

19. $f(1)\geq2$이거나 f의 치역이 B인 경우의 수는, $f(1)\geq2$인 경우에 $f(1)=1$이고 f의 치역이 B인 경우를 더해주면 됩니다. 각각 54, 12가지가 나와 총 66가지가 나옵니다.

20. 무한등비급수 문제는 반드시 초항과 공비를 구해야 하고, 이 문제도 마찬가지입니다. 초항을 구할 때, 아래쪽 활꼴의 넓이를 왼쪽에 더하면 R_1의 넓이는 $\triangle B_1B_2D_1$의 넓이와 같다는 것을 알 수 있습니다. ($\angle B_2AD_1=\angle D_1AC_1$이기 때문에 $B_2D_1=D_1C_1$이기 때문입니다.)
B_1C_1의 길이는 코사인법칙을 이용해 $\sqrt{7}$이 나옵니다. 여기서 각의 이등분선 정리를 이용해 $B_1D_1=\dfrac{3}{5}\sqrt{7}$임을 얻어낼 수 있고, $B_1D_1\times B_1C_1=B_1B_2\times B_1A$임을 이용해 B_1B_2의 길이도 구해줄 수 있습니다. 그러면 $\dfrac{1}{2}ab\sin\theta$공식을 이용해 $\triangle B_1B_2D_1$의 넓이를 구할 수 있을 것 같습니다. 또한, 공비도 주어진 조건만 이용하면 충분히 구할 수 있습니다.

21. 제가 본 평가원 21번 중 가장 쉬운 문제였습니다. 아마 이번 시험에, 이 문제보다 어려운 문제가 최소 6~7개는 출제된 것 같습니다.

말 그대로 a_1부터 a_m을 모두 더해주면 됩니다. 그러면 $\sum_{k=1}^{m} a_k = \frac{m}{2} - \frac{1}{2}\log\left(\frac{m+2}{2}\right)$임을 얻어낼 수 있습니다. 이 값이 유리수이려면, $m+2$가 2의 거듭제곱이 되어야 하고, $m+2$가 2의 거듭제곱인 것들을 모두 대입해보면 $m+2$가 2의 홀수 거듭제곱일 때 성립하는 것을 알 수 있습니다. 따라서 가능한 m은 6, 30, 126이 전부입니다. (2는 안됩니다.)

22. 평범한 이항정리 문제입니다.

23. sin법칙을 아는지 묻는 문제입니다.

24. 이 수열은 배운 적이 없는 수열이지만, 실제로 넣고 계산해보면 주기가 6인 주기수열이라는 것을 쉽게 파악할 수 있습니다. 같은 맥락으로 $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$도 주기가 6인 주기수열입니다.

25. 음함수의 미분 문제입니다. 그나마 e^{xy}의 미분이 까다로울 수 있는데, $\frac{d(xy)}{dx}\frac{d(e^{xy})}{d(xy)}$로 계산하면 간단하게 해결됩니다.

26. 어렵지 않은 문제이고 풀이 방법이 다양합니다. 제 풀이를 말씀드리겠습니다. $S_k = -16, S_{k+2} = -12$임을 이용해 $a_{k+1} + a_{k+2} = 4$임을 구할 수 있습니다. 공차가 2임이 주어졌기 때문에 $a_{k+1} = 1, a_{k+2} = 3$임을 알 수 있습니다. 여기서 $a_n = 2n - 2k - 1$임이 나오고, 이와 $S_k = -16$조건을 이용해 $k = 4$임을 구해낼 수 있습니다.

27. 꺼낸 공의 수가 같은 것이 있다는 조건이 일반적인 조건이 아닙니다. 이 경우의 수는 검은 색 3과 흰 색 3이 모두 나온 경우와 검은 색 4와 흰 색 4가 모두 나온 경우의 합집합이라고 생각하면 쉬울 것 같습니다.
검은 색 3과 흰 색 3이 모두 나오는 경우는 나머지 공 6개 중에 2개를 고르면 되므로 총 15가지입니다. (후자도 마찬가지로 15가지입니다.)
여기서 겹치는 경우를 빼줘야 하는데, 겹치는 경우는 검은색 3, 4, 흰색 3, 4가 모두 나오는 경우이므로 1가지밖에 없습니다. 따라서 총 경우의 수는 $15+15-1=29$가지입니다.
마찬가지로 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 같은 것이 있고 검은 공이 2개일 확률도 구할 수 있습니다. 계산해보면 $9+9-1=17$가지가 됩니다.

28. 어려운 문제이지만, 작년 6월 모의평가에 비슷한 형태의 문항이 나왔습니다. $\triangle DMC-\triangle HMC$가 $f(\theta)-g(\theta)$가 됩니다. $\triangle DMC=\frac{1}{2}\times1\times\sin\theta\times\sin(90+\frac{\theta}{2})$가 되고, $\triangle MHC=\frac{1}{2}\times1\times\sin\theta\times\sin(90+\theta)$가 나옵니다. 따라서 구하는 값 $\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta^3}$는 $\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta}{2\theta^3}(\cos\frac{\theta}{2}-\cos\theta)=\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{2\theta^2}((1-\cos\theta)-(1-\cos(\frac{\theta}{2})))$ $=\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{8})=\frac{3}{16}$이 나옵니다.

29. 검은색 볼펜 a자루를 2명의 학생에게 나누어주는 방법은 $2Ha=a+1$가지입니다. 따라서 검은색 볼펜 a자루, 파란색 볼펜 b자루, 빨간색 볼펜 c자루를 2명의 학생에게 나누어주는 방법은 $(a+1)(b+1)(c+1)$가지가 됩니다. 여기서 a,b,c로 가능한 경우를 모두 구해, 경우를 더해주면 됩니다. 9가지밖에 안 나와, 쉽게 계산할 수 있습니다. (29번치고 조금 쉽습니다.)

30. $f(2^x)$가 상수일 때, 기울기가 2일 때, 기울기가 -2일 때 $g(x)$를 계산하는 방법이 달라집니다. 계산해보면 $f(2^x)$가 상수인 부분에서는 $g(x)=0$, $f(2^x)$의 기울기가 2인 부분과 -2인 부분에서는 $f(x)=2^{x+1}\ln2$가 나옵니다. 따라서 2^x가 3으로 나눈 나머지가 1이거나 2일 때만 불연속이 됩니다. $\frac{1}{32}<2^x<32$이므로, 가능한 2^x은 총 21가지입니다. 여기서 2^x이 3으로 나눈 나머지가 1일 때는 $\frac{g(a_k)}{\ln2}=0$, 2일 때는 $\frac{g(a_k)}{\ln2}=2^{x+1}$이 되므로 답은 $21+2(2+5+8+\cdots 29)=331$이 됩니다.