지금부터 보실 행동강령과 해설은 아드레날린을 통해 다른 기출 문제에서도 보실 수 있습니다!

자세한 내용은

https://orbi.kr/00043463424

에서 확인해주세요! 판매 페이지 링크는

https://atom.ac/books/9395

입니다. 감사합니다!

아드레날린 ex
공통

1. 두 정수 a, b에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \le x < 4$에서 $f(x) = ax^2 + bx - 24$이다. (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4) = f(x)$이다.

$1 < x < 10$일 때, 방정식 $f(x) = 0$의 서로 다른 실근의 개수가 5이다. $a+b$의 값은? 〔2022년 10월 11〕

① 18　　② 19　　③ 20　　④ 21　　⑤ 22

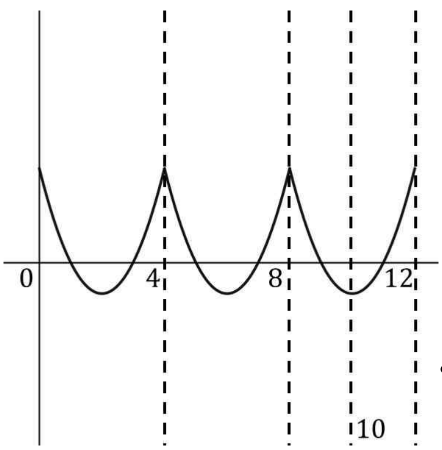
1. 정답 ④ 〔2022년 7월 11〕

1) 조건해석, 연속은 좌극한 우극한 함숫값 확인

정수 a, b가 있는데 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이랍니다. 그렇다네요.

(가)조건에서 $0 \le x < 4$에서 $f(x)=ax^2+bx-24$이랍니다. 일단 이차함수의 모양처럼 생겼지만 $a=0$일 가능성도 고려해야 합니다. 그럼 일차함수가 되잖아요. 그리고 $b=0$일 가능성도 고려해야 하죠. 따라서 이차 이하의 함수라고 해두면 되겠네요.

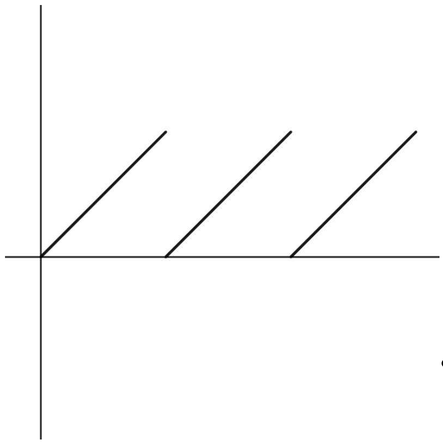
(나)조건에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$라고 합니다. x에서의 함숫값과 $x+4$에서의 함숫값이 같다는 거죠? 다시 말하면 $f(x)$는 주기가 4인 주기함수라는 거네요. x값이 4만큼 증가할 때마다 기존의 x와 같은 모양이 나타난다는 거예요. 그런데 (가)조건에서 $0 \le x < 4$에서 $f(x)=ax^2+bx-24$라고 했었죠? 결국 0부터 4, 4부터 8, 8부터 12까지의 함수의 모양이 완전히 같아야 합니다. 예를 들자면



이렇게 말이죠.

이때 $1 < x < 10$일 때, 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 5랍니다. 다시 말하면 $1 < x < 10$에서 x축과 5번 만난다는 거죠?

자 이제 생각을 해볼게요. 만약 $a=0$이어서 $f(x)$가 일차함수라면? $f(x+4)=f(x)$이 완전히 불가능합니다.



이렇게 될 테니까요.

만약 $a=0,\ b=0$이어서 $f(x)$가 상수함수라면? $f(x)=-24$가 되는 거죠. 이러면 애초에 x축과 만날 수 없습니다. 결국 $f(x)$는 이차함수입니다.

$f(x)$가 이차함수라면 $f(x+4)=f(x)$를 만족시키면서 연속을 만족시키려면 범위에 각 끝에서의 함숫값이 같아야 합니다. 다시 말해 $f(0)=f(4)$여야 한다는 거죠. 그래야 반복되는 범위의 끝에서 깔끔하게 이어질 테니까요. 따라서 $-24=16a+4b-24$이고 $b=-4a$입니다. $f(x)=ax^2-4ax-24$이네요.

이제 $1<x<10$의 범위에서 x축과 5번 만난다는 조건을 확인해야 해요. 만약 $0\le x<4$에서의 $f(x)$가 x축과 아예 만나지 않는다면? 범위마다 반복이 되니까 결국 0번 만나게 되겠죠? 안 됩니다.

만약 한 번만 만난다면? $1<x<10$에서 아무리 적어도 1번은 만나게 되고 아무리 많아도 3번 만나게 됩니다. 총 3번 반복되는 거니까요. 심지어 $0<x<4$와 $8<x<12$에서는 범위가 짤리죠. $1<x<4$와 $8<x<10$으로요. 따라서 $0\le x<4$에서의 $f(x)$와 x축은 두 번 만나야 합니다.

문제는 어느 범위에서 만나느냐에요. $f(x)=ax^2-4ax-24$를 미분하면 $f'(x)=2ax-4a=2a(x-2)$이므로 $x=2$이 대칭축인 함수입니다. 그러니까 $0<x<2$ 부분에서 한 번 만나면 대칭 부분에 있는 $2<x<4$에서도 한 번 만나게 된다는 거죠.

그런데 문제는 범위가 $1<x<10$이라는 거예요. 범위를 쪼개보면 $1<x<4,\ 4<x<8,\ 8<x<10$이죠? $4<x<8$은 사실상 함수 하나 전체니까 x축과 만나는 점의 개수는 2개일 거예요. 거기에 $0<x<4$에서 x축과 만나는 점의 개수가 2개인데 $f(x)$는 $x=2$ 대칭이니까 $2<x<4$의 범위에도 하나가 있을 거구요.

그러면 남은 범위는 $1<x<2,\ 8<x<10$입니다. $8<x<10$은 $0<x<2$와 대응이 되죠? 4마다 함수가

반복되니까요. 그럼 결국 종합해보면 $1 < x < 2$에서도 x축과 만나야 합니다.

$1 < x < 2$에서 x축과 만나게 하려면 어떻게 해야 할까요? 일단 $f(2)$는 무조건 x축 아래에 있어야 합니다. 그래야 밑에서 위로 올라오면서 x축과 만날 테니까요. 그런데 그걸 $x=1$ 전에 해야 하잖아요? 다시 말하면 $x=1$에서는 이미 위로 올라와 있어야 한다는 거네요. 정리해보면 $f(2) < 0$, $f(1) > 0$

그런데 그거 하나만 되나요? a는 자연수가 아니에요. 정수죠. 음수도 가능하다는 거예요. $f(2)$가 x축 위에 있고 $f(1)$이 아래에 있는 경우도 가능하죠. 따라서 $f(2) > 0$, $f(1) < 0$도 가능합니다.

모두 종합해보면 $f(1)$와 $f(2)$의 부호가 서로 달라야 한다는 것이 되므로 $f(1)f(2) < 0$입니다.
$f(1) = -3a-24$, $f(2) = -4a-24$이므로 $(-3a-24)(-4a-24) < 0$입니다. 정리하면 $(a+8)(a+6) < 0$이고 $-8 < a < -6$입니다. 이 사이에 있는 정수 a는 $a=-7$만 가능하죠? 따라서 $a=-7$이고 $b=-4a=28$입니다. $a+b=21$이네요. 답은 ④번입니다.

2. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. 두 자연수 p, q에 대하여 $S_n = pn^2 - 36n + q$일 때, S_n이 다음 조건을 만족시키도록 하는 p의 최솟값을 p_1이라 하자.

임의의 두 자연수 i, j에 대하여 $i \neq j$이면 $S_i \neq S_j$

$p = p_1$일 때, $|a_k| < a_1$을 만족시키는 자연수 k의 개수가 3이 되도록 하는 모든 q의 값의 합은? 〔2022년 10월 15〕

① 372 ② 377 ③ 382 ④ 387 ⑤ 392

2. 정답 ① 〔2022년 10월 15〕

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 문제해석, 자연수 보이면 숫자 넣을 준비

$\{a_n\}$의 첫째항부터 n항까지 합을 S_n이라고 한답니다. $S_n = pn^2 - 36n + q$인데 p, q가 자연수라네요.

이때 임의의 두 자연수 i, j에 대하여 $i \neq j$이면 $S_i \neq S_j$가 되게 하는 p의 최솟값을 p_1이라고 한답니다. 일단 $i \neq j$이면 $S_i \neq S_j$이라는 게 무슨 말일까요? S_n을 함수라고 한다면 i, j는 x값, S_i, S_j는 y값(함숫값)이죠? 그러니까 x값이 달라지면 y값도 달라져야 한다는 말이에요. 하나의 함숫값 a에 대하여 $y = a$와 $y = S_n$이 만나는 점의 개수는 1을 초과할 수 없습니다.

근데 S_n는 함수이긴 한데 특수한 함수에요. 왜냐하면 정의역이 자연수로 고정되어 있거든요. $S_{\frac{1}{2}}$ 이런 거 있나요? S_1, S_2, $\cdots$만 가능합니다. 그러니까 S_n는 이차함수의 형태이긴 하나 x값에 자연수만 들어갈 수 있는 함수라고 생각하면 되겠어요.

이걸 왜 이야기하냐구요? 일단 S_n은 이차함수의 형태에요. i, j가 자연수라는 조건이 없으면 $i \neq j$이면 $S_i \neq S_j$을 절대로 만족시킬 수 없는 함수죠. 대칭축이 있고 하나의 함숫값에 대하여 만나는 점이 2개나 있으니까요.

그런데 x값이 자연수이기 때문에 아닐 수도 있습니다. 이제 경우를 좀 나눠볼게요.

S_n이 완벽하게 대칭이라면? 예를 들어 $n = 5$에서 대칭이라고 해볼게요. 그러면 $S_4 = S_6$이죠? $n = 5$에 대하여 대칭이니까요. 대칭축이 $n = 1$을 제외한 자연수면 모두 불가능합니다. 대칭축이 $n = 1$이거나 $n = 1$보다 왼쪽에 있는 건 가능해요. S_n의 정의역은 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$이므로 대칭축의 오른쪽 부분만 남으니까요.

지금 현재 대칭축은 $\dfrac{18}{p}$인데 결국 이 대칭축이 $n = 1$보다 작거나 같아야 하므로 $\dfrac{18}{p} \leq 1$이고 $p \geq 18$입니다. 일단 범위 하나 찾았어요.

또한 완벽하게 대칭인 경우는 하나 더 있어요. 바로 $n = \dfrac{13}{2}$에서 대칭 같은 경우이죠. 이러면 $S_6 = S_7$, $S_5 = S_8$, $\cdots$이 됩니다. 지금 조건을 만족시키는 경우를 $p \geq 18$일 때를 찾았죠. 그러면 나머지 1부터 17까지를 확인해봐야 하잖아요? 그 중 가장 작은 수가 p_1이고 $p = p_1$일 때를 확인해야 하니까요. 그러니까

대칭축이 자연수이거나, 대칭축이 $\frac{\text{자연수}}{2}$의 형태가 되면 바로 탈락입니다. 자연수에 숫자 넣어서 찾아보죠.

2) 자연수 보이면 숫자 넣기

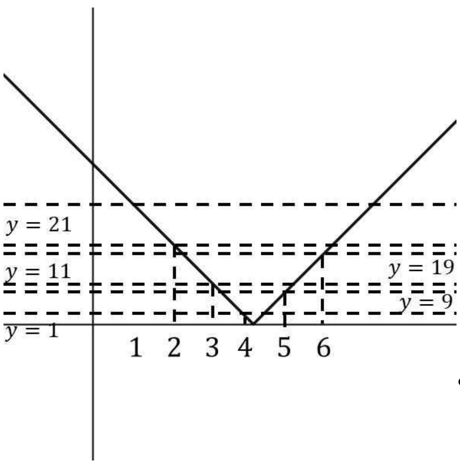
일단 18의 약수 1, 2, 3, 6, 9는 불가능합니다. 그러면 $\frac{18}{p}$가 무조건 자연수가 되거든요. $p=4$이라면 $\frac{18}{4}=\frac{9}{2}$이므로 불가능합니다. $p=5$이면 $\frac{18}{5}$입니다. 되네요! 따라서 $p_1=5$입니다.

이때 $p=5$일 때 $|a_k|<a_1$을 만족시키는 자연수 k의 개수가 3이 되도록 하는 모든 q의 값의 합을 구하랍니다.

일단 $S_n=5n^2-36n+q$입니다. 이때 $S_1=a_1=q-31$이구요, $S_n-S_{n-1}=a_n$이므로

$a_n=10n-41$ $(n\geq 2)$입니다. 결국 $|10k-41|<q-31$이어야 하겠네요.

$y=|10x-41|$를 그려보면



이렇게 됩니다. 이제 $y=q-31$을 그려서 $|a_k|<a_1$가 되는 k값이 3개가 되는 지점을 찾아야 해요. 그림의 함숫값을 잘 보세요. 가장 작은 1, 9, 11 보이시죠? 여기가 가장 작은 함숫값 3개네요. 그러면 11보다 1만큼 큰 12부터 가장 작은 함숫값이 4개가 되는 19 바로 전 18까지가 가능한 $y=q-31$의 범위이죠? 따라서 따라서 q는 43부터 50까지입니다. 모든 합은

$\frac{43+50}{2}\times 8=372$이네요. 답은 ①번입니다.

3. 최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(5)$의 최댓값을 구하시오.
〔2022년 10월 20〕

(가) $\lim_{x \to 0} \frac{\lvert f(x)-1 \rvert}{x}$의 값이 존재한다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $xf(x) \geq -4x^2 + x$이다.

3. 정답 226 〔2022년 10월 20〕

1) 조건해석

$f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수인데 (가)조건에서 $\lim_{x \to 0} \frac{|f(x)-1|}{x}$의 값이 존재한답니다. 값이 존재한다는 건 $\lim_{x \to 0+} \frac{|f(x)-1|}{x} = \lim_{x \to 0-} \frac{|f(x)-1|}{x}$이라는 거죠? 좌극한값과 우극한값이 같아야 합니다.

일단 먼저 분모가 0으로 가는데 값이 존재하니까 분자도 0으로 가야 하는데 $f(x)$는 다항함수이므로 $f(0)-1=0$이고 $f(0)=1$입니다. $\lim_{x \to 0+} \frac{|f(x)-f(0)|}{x} = \lim_{x \to 0-} \frac{|f(x)-f(0)|}{x}$이네요.

일단 형태는 미분계수처럼 보이죠? 먼저 $f(0)=1$이므로 $f(x)-f(0)$은 $x=0$에서 x축과 만나게 됩니다. 그러면 절댓값을 씌웠을 때 접혀서 올라가게 됩니다. 이때 $f'(0)=0$이 아니라면, $x=0$에서 $f(x)$의 부호가 바뀌게 되겠죠? 음수였다가 양수로 올라오거나 양수에서 음수로 내려가는 모양이 될 거예요. $f(x)-f(0)$은 $x=0$에서 x축과 그냥 만나니까요.

어느 쪽이든 $\lim_{x \to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0) = -\lim_{x \to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -f'(0)$이 되네요. 절댓값을 풀었을 때 양수인 부분은 그대로 나올 거고, 음수인 부분은 부호가 바뀌어서 나오겠죠. 그러면 결국 좌극한과 우극한의 부호가 서로 반대가 됩니다. 따라서 $f'(0)=0$입니다. 모순이 일어나죠? 우리는 처음에 $f'(0)=0$이 아니라고 가정했는데 모순이 발생하므로, 결국 $f'(0)=0$입니다.

(나)조건에서 모든 실수 x에 대하여 $xf(x) \geq -4x^2+x$라고 하네요. 지금 $f(0)=1$, $f'(0)=0$이므로, $f(x)$는 $y=1$과 $x=0$에서 접하죠? 따라서 차함수에 의하여 $f(x)-1$은 x라는 인수를 적어도 두 개 가져야 합니다. 따라서 $f(x)-1=x^2(x-a)$이고, $f(x)=x^2(x-a)+1$입니다.

그대로 넣으면 $x^3(x-a)+x \geq -4x^2+x$입니다. 정리하면 $x^4-ax^3+4x^2 \geq 0$이고 $x^2(x^2-ax+4) \geq 0$입니다. 왼쪽의 x^2은 항상 0보다 크거나 같으므로 오른쪽의 x^2-ax+4 역시 항상 0보다 크거나 같아야 곱해서 0보다 크거나 같아지겠죠? 따라서 판별식이 0보다 작거나 같아야 하므로 $a^2-16 \leq 0$이고 $-4 \leq a \leq 4$입니다.

$f(x)=x^2(x-a)+1$이고 $f(5)=25(5-a)+1$인데 $-4 \leq a \leq 4$에서 $f(5)$의 최댓값은 $a=-4$일 때 226입니다.

4. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 구간 $(-\infty, t]$ 에서 함수 $f(x)$의 최솟값을 m_1이라 하고, 구간 $[t, \infty)$ 에서 함수 $f(x)$의 최솟값을 m_2라 할 때,

$$g(t)= m_1 - m_2$$

라 하자. $k>0$인 상수 k와 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$g(t)= k$를 만족시키는 모든 실수 t의 값의 집합은 $\{t \mid 0 \le t \le 2\}$이다.

$g(4)= 0$일 때, $k+g(-1)$의 값을 구하시오. 〔2022년 10월 22〕

4. 정답 82 〔2022년 10월 22〕

1) 문제해석

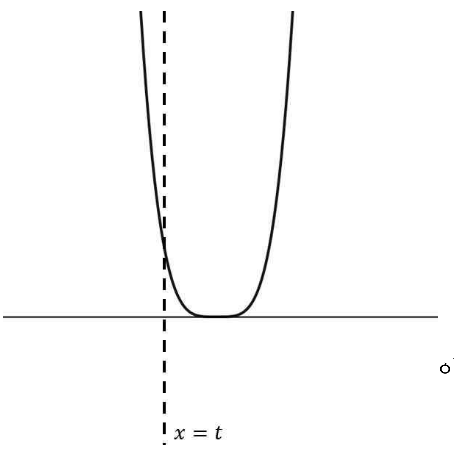
최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 있는데 $g(t)$라는 함수가 있답니다. 이 함수는 $(-\infty, t]$ 에서 $f(x)$의 최솟값에서 $[t, \infty)$ 에서 $f(x)$의 최솟값을 뺀 함수에요. 다시 말하면 $x=t$라는 경계를 설정하고 그보다 왼쪽부분에서의 최솟값에서 오른쪽부분에서의 최솟값을 뺀 값입니다. 물론 각 경계에는 $x=t$가 포함되구요. 닫힌구간이니까요.

이때 양수인 상수 k가 있는데 $g(t)=m_1-m_2=k$를 만족시키는 모든 실수 t의 값의 집합은 $\{t|0 \le t \le 2\}$이라고 합니다. 그러니까 다시 말하면 $0 \le t \le 2$일 때, 그리고 오직 그때만 $g(t)=m_1-m_2=k$가 된다는 거죠. 그리고 $g(4)=0$이라네요. $t=4$일 때 $m_1=m_2$라는 거죠?

$g(t)=m_1-m_2=k$가 된다는 건 어떤 말일까요? 일단 $x=t$ 왼쪽부분에서의 최솟값에서 오른쪽부분에서의 최솟값을 뺀 값이 일정해야 한다는 말이에요. 다시 말하면 두 값 모두 변화하면 안 된다는 말이죠. 어느 하나라도 변화하면 값이 달라지니까요. (물론 두 값의 변화하는 속도가 같은 경우도 있지만 이건 함수가 반복되거나 대칭인 경우가 아니고서야 불가능하니까요.) 이때 $k>0$이므로 $m_1>m_2$이고, 오른쪽 최솟값이 더 작아야 합니다.

2) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

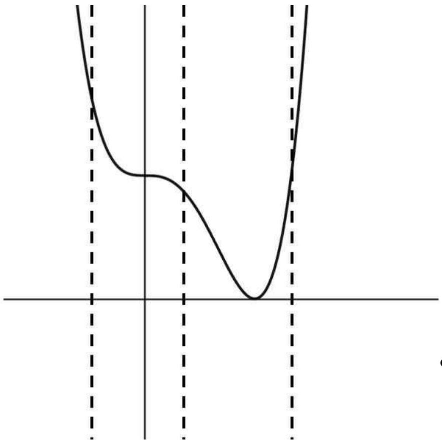
일단 $f(x)$의 개형부터 생각해봅시다. 만약 극점이 하나 있는 개형이라면?



이렇게 되는데 이렇게 t를 설정하면

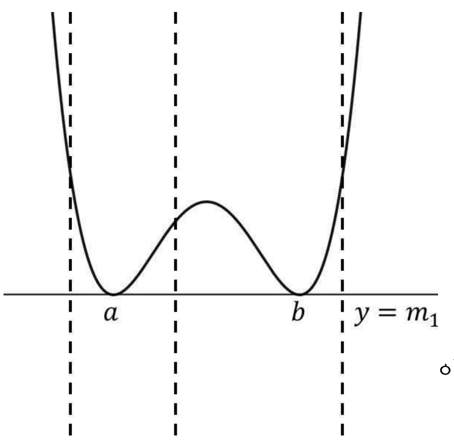
오른쪽 최솟값은 0이지만 왼쪽 최솟값은 $f(t)$입니다. $f(t)$는 계속 변화하잖아요? 두 개의 최솟값이 모두 일정한 부분은 없습니다. $f(x)$가 0이 되는 부분을 넘어가서 t를 설정해도 마찬가지에요. 왼쪽 최솟값은 0이지만 오른쪽 최솟값은 $f(t)$입니다. 마찬가지로 $f(t)$가 변화하므로 일정한 구간이 없네요.

다음의 개형의 경우

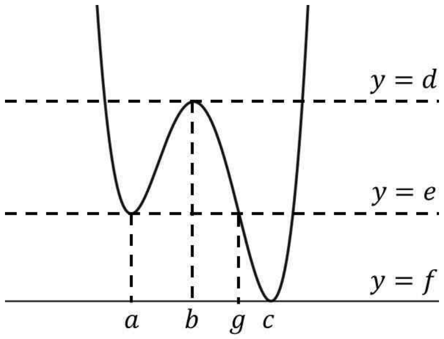


어느 곳에 $x=t$를 설정해도 방금 전과 같은 문제가 발생합니다. 하나의 최솟값은 상수(함수의 최솟값$=0$)인데 다른 최솟값은 $f(t)$인 문제가 발생해요.

일단 여기서 알 수 있는 사실은 함수의 최솟값이 존재하는 경우 m_1과 m_2 둘 중에 하나는 무조건 그 값이라는 거네요. $x=t$를 설정할 때 왼쪽이든 오른쪽이든 최솟값이 존재할 테니까요. 그런데 우리는 두 값이 모두 고정되어서 움직이지 않는 구간인 $0 \le t \le 2$를 확인해야 하잖아요? 일단 극점이 세 개 있는 다음 개형으로 넘어가봅시다.



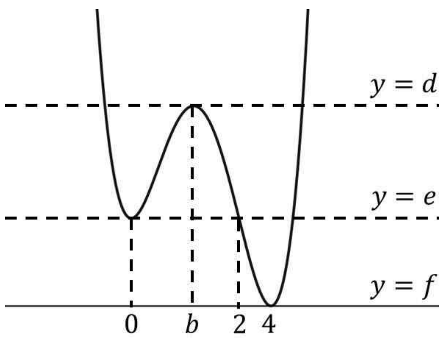
이런 개형인 경우 t를 a전에 설정할 경우 왼쪽 최솟값은 $f(t)$, 오른쪽 최솟값은 m_2입니다.(함수는 그냥 막 설정한 거니까 0이 아닐 수도 있어요!) $f(t)$가 변화하니까 조건은 만족시키지 못합니다. t를 a부터 b까지 설정하면 왼쪽 최솟값 m_1과 오른쪽 최솟값 m_2 모두 같으므로 $m_1-m_2=0$이네요. 다만 우리는 $k>0$인 부분을 찾아야 하잖아요? t를 b보다 큰 부분에 설정하면 왼쪽 최솟값은 0, 오른쪽 최솟값은 $f(t)$입니다. 이것도 $f(t)$가 변화하니까 조건을 만족시키지 못하네요. 결국 조건을 만족시키는 구간이 없습니다.



이런 함수라면 a전까지 t를 설정하면 $m_1 = f(t)$, $m_2 = f$로 $f(t)$가

변화합니다. 안 되겠죠? a부터 g까지는 $m_1 = e$, $m_2 = f$입니다. 오! 이거는 되네요? 지금 그래프를 보면 e가 f보다 위에 있으니까 $e - f = k > 0$이잖아요? 이게 0부터 2까지라는 거니까 $a = 0$, $g = 2$이네요. g부터 c까지는 $m_1 = f(t)$, $m_2 = f$입니다. 안 되네요. 딱 $t = c$일 때는 왼쪽, 오른쪽 다 최솟값이 f니까 $g(c) = 0$이네요. c부터는 $m_1 = f$, $m_2 = f(t)$이니까 이것도 안 됩니다. 결국 개형을 찾았어요!

아까 $g(4) = 0$라고 했었죠? 지금 되는 게 c니까 $c = 4$이네요. 따라서



이거네요.

3) 함수 구하기 - 차함수

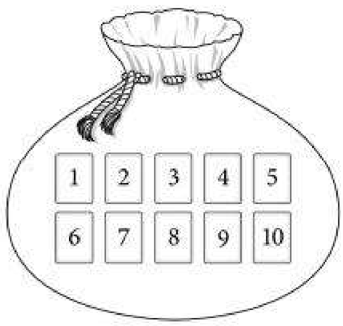
$f(x) - e$는 x라는 인수를 두 번, $(x-2)$라는 인수를 한 번 갖고 나머지 인수를 $(x-h)$라고 하면 $f(x) - e = x^2(x-2)(x-h)$이고 $f(x) = x^2(x-2)(x-h) + e$입니다. 이때 그래프를 보면 $f'(4) = 0$이죠?
미분해보면 $f'(x) = 2x(x-2)(x-h) + x^2(x-h) + x^2(x-2)$인데 $f'(4) = 0$이니까 $h = 5$입니다.
$f(x) = x^2(x-2)(x-5) + e$이네요.

이때 $k + g(-1)$을 구하랍니다. 일단 k는 $e - f$잖아요? 이때 $f(4) = f = e - 32$이니까 $k = 32$입니다.
$g(-1)$은 $t = -1$을 설정해서 왼쪽 최솟값에서 오른쪽 최솟값인 f를 빼면 되는 거잖아요? 이때 $t < 0$일 때

$m_1 = f(t),\ m_2 = f$였으니까 $g(-1) = f(-1) - f = e + 18 - f = 50$입니다. 따라서 합은 $32 + 50 = 82$이네요.

5. 1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 10장의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 카드 4장을 동시에 꺼내어 카드에 적혀 있는 수를 작은 수부터 크기 순서대로 a_1, a_2, a_3, a_4라 하자. $a_1 \times a_2$의 값이 홀수이고, $a_3 + a_4 \geq 16$일 확률은? 〔2022년 10월 확통 27〕

① $\frac{1}{14}$　② $\frac{3}{35}$　③ $\frac{1}{10}$　④ $\frac{4}{35}$　⑤ $\frac{9}{70}$



5. 정답 ⑤ 〔2022년 10월 확통 28〕

1) 확통은 상황이해 후 기준잡고 분류, 문제해석

일단 1부터 10까지 10장의 카드가 있는데 아무거나 4장을 꺼내서 작은 순서대로 a_1, a_2, a_3, a_4라고 한답니다. 이때 $a_1 \times a_2$, 즉 가장 작은 수와 두 번째로 작은 수의 곱이 홀수이고 $a_3 + a_4 \geq 16$, 즉 가장 큰 수와 두 번째로 큰 수의 합이 16이상이어야 한다네요.

일단 두 수를 곱해서 홀수가 되려면 두 수 모두 홀수여야 합니다. 지금 홀수는 1, 3, 5, 7, 9 5개네요. 그런데 문제는 이게 가장 작은 두 수라는 거예요. 그러면 차라리 $a_3 + a_4 \geq 16$를 먼저 케이스를 나누고 나머지에 대하여 홀수여부를 확인하는 게 좋지 않을까요?

먼저 전체 경우의 수는 ${}_{10}C_4 = 210$입니다.

일단 더해서 16이 나오려면 $6+10$, $7+9$입니다. $6+10$의 경우 이제 a_1, a_2는 1부터 5까지만 가질 수 있어요. 이 중에서 홀수는 1, 3, 5로 3개인데 2개를 고르는 거니까 ${}_3C_2 = 3$입니다.
$7+9$의 경우 a_1, a_2는 1부터 6까지 고를 수 있어요. 홀수는 1, 3, 5로 변하지 않으니 ${}_3C_2 = 3$입니다.

17이 나오려면 $7+10$, $8+9$입니다. $7+10$의 경우 홀수는 1, 3, 5로 이 중 2개를 고르면 ${}_3C_2 = 3$입니다.
$8+9$의 경우 1, 3, 5, 7로 이 중 두 개를 고르면 ${}_4C_2 = 6$입니다.

18이 나오려면 $8+10$입니다. 1, 3, 5, 7로 ${}_4C_2 = 6$입니다.

19가 나오려면 $9+10$입니다. 1, 3, 5, 7로 ${}_4C_2 = 6$입니다.

따라서 총 $3+3+3+6+6+6 = 27$이네요. 구하는 확률은 $\dfrac{27}{210} = \dfrac{9}{70}$입니다. 답은 ⑤번이네요.

6. 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to Y$의 개수를 구하시오.
〔2022년 10월 확통 29〕

(가) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \le f(x_2)$이다.
(나) $f(1) \le 3$
(다) $f(3) \le f(1)+4$

6. 정답 105 〔2022년 10월 확통 29〕

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류, 조건해석

$X=\{1, 2, 3, 4\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$인데 $f : X \to Y$의 개수를 구하라네요.

(가)조건에서 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \le f(x_2)$이랍니다. 이 말은 결국 중복을 허용하여 $f(x_1)$, $f(x_2)$를 고르면 x_1, x_2 중에서 어느 것이 더 크냐에 따라서 자동적으로 함숫값이 결정된다는 거죠? 작거나 같은 순서로 $f(x_1)$, $f(x_2)$가 결정되는 거죠. 결국 중복조합을 사용하는 케이스입니다.

(나)조건에서 $f(1) \le 3$이고, (다)조건에서 $f(3) \le f(1)+4$라네요. 두 조건이 연결되어 있죠? 일단 (나)조건부터 나열하고 (다)조건을 보면 되겠어요.

$f(1) \le 3$이니까 가능한 경우는 세 가지죠?

2) 케이스 분류

2-1) $f(1)=1$일 때

$1 \le f(2) \le f(3) \le 5$, $f(3) \le f(4)$입니다. $f(3)=5$라면? $f(2)$는 $1 \sim 5$ 중에서 선택하면 되구요, $f(4)$는 5, 6 중에서 선택하면 됩니다. $5 \times 2 = 10$이네요.

$f(3)=4$라면? $f(2)$는 $1 \sim 4$ 중에서 선택하면 되구요, $f(4)$는 4, 5, 6 중에서 선택하면 됩니다.

$4 \times 3 = 12$이네요.

$f(3)=3$이면 $f(2)$는 $1 \sim 3$ 중에서, $f(4)$는 3, 4, 5, 6 중에서 선택하면 되고, $3 \times 4 = 12$입니다.

$f(3)=2$이면 $f(2)$는 $1 \sim 2$ 중에서, $f(4)$는 2, 3, 4, 5, 6 중에서 선택하면 되고, $2 \times 5 = 10$입니다.

$f(3)=1$이면 $f(2)=1$이구요, $f(4)$는 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 선택하면 됩니다. 6이네요.

따라서 총 $10+12+12+10+6=50$이네요.

2-2) $f(1)=2$일 때

$2 \le f(2) \le f(3) \le f(4) \le 6$입니다. 이건 그냥 2부터 6까지 5개 중에서 3개 중복을 허용해서 고르면 되겠네요.

${}_5H_3 = {}_7C_3 = 35$입니다.

2-3) $f(1)=3$일 때

$3 \le f(2) \le f(3) \le f(4) \le 7$입니다. 7은 불가능하니까 3부터 6까지 4개 중에서 3개 중복을 허용해서 고르면 되겠네요. ${}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$입니다.

구하는 경우의 수는 $50+35+20=105$입니다.

7. 주머니 A에 흰 공 3개, 검은 공 1개가 들어 있고, 주머니 B에도 흰 공 3개, 검은 공 1개가 들어 있다. 한 개의 동전을 사용하여 〔실행 1〕과 〔실행 2〕를 순서대로 하려고 한다.

〔실행 1〕 한 개의 동전을 던져 앞면이 나오면 주머니 A에서 임의로 2개의 공을 꺼내어 주머니 B에 넣고, 뒷면이 나오면 주머니 A에서 임의로 3개의 공을 꺼내어 주머니 B에 넣는다. 〔실행 2〕 주머니 B에서 임의로 5개의 공을 꺼내어 주머니 A에 넣는다.

〔실행 2〕가 끝난 후 주머니 B에 흰 공이 남아 있지 않을 때, 〔실행 1〕에서 주머니 B에 넣은 공 중 흰 공이 2개이었을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) 〔2022년 10월 확통 30〕

7. 정답 17 〔2022년 10월 확통 30〕

1) 조건부확률 A일 때 B일 확률 $= \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} = \dfrac{A\text{이고 }B\text{일 경우의 수}}{A\text{일 경우의 수}}$

주머니 A와 B에 모두 흰 공 3개, 검은 공 1개가 들어 있답니다. 이때 한 개의 동전을 던져서

앞면이 나오면 A에서 공 2개를 꺼내서 B에 넣고
뒷면이 나오면 A에서 공 3개를 꺼내서 B에 넣는다고 합니다.

그리고 나서 B에서 공 5개를 꺼내서 A에 넣는다고 하네요.

이때 B에 흰 공이 남아 있지 않을 때, 처음 A에서 공 꺼낼 때 꺼낸 공 중에서 흰 공이 2개였을 확률을 구하랍니다. 어우 읽기만 해도 복잡하네요.

일단 구하는 확률은 $\dfrac{\text{실행 1에서 꺼낸 흰 공 2개}}{\text{실행 2 이후 B에 흰 공 없음}}$ 이죠?

일단 분모부터 구해봅시다. 만약 실행 1에서 앞면이 나왔다면(확률 $\dfrac{1}{2}$), 실행 1이 끝난 후 B에는 공이 6개가 있어야 합니다.

만약에 실행 1에서 흰 공 2개를 골랐다면(확률 $\dfrac{{}_3C_2}{{}_4C_2}=\dfrac{1}{2}$) B에는 흰5검1 이렇게 있을 거예요. 흰 공이 남아 있지 않게 하려면 6개 중에서 5개를 고를 때 흰 공만 5개 골라야 하니까 확률은 $\dfrac{{}_5C_5}{{}_6C_5}=\dfrac{1}{6}$ 입니다. 총 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{24}$ 이네요.

만약에 실행 1에서 흰 공 1개, 검은 공 1개를 골랐다면(확률 $\dfrac{{}_3C_1}{{}_4C_2}=\dfrac{1}{2}$) B에는 흰4검2 이렇게 있겠네요. 흰 공이 남아 있지 않게 하려면 6개 중에서 5개를 고를 때 흰 공 4개, 검은 공 1개를 골라야 하니까 확률은 $\dfrac{{}_4C_4\times{}_2C_1}{{}_6C_5}=\dfrac{1}{3}$ 입니다. 총 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{12}$ 이네요. 여기까지 앞면인데 총 $\dfrac{1}{24}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{8}$ 입니다.

만약 실행 1에서 뒷면이 나왔다면(확률 $\frac{1}{2}$) 실행 1이 끝난 후 B에는 공이 7개가 있어야 합니다.

만약에 흰 공 3개를 골랐다면($\frac{{}_3C_3}{{}_4C_3}=\frac{1}{4}$) B에는 흰6검1 이렇게 있을 거예요. 그런데 이때는 5개를 골라서는 흰 공을 모두 고르는 게 불가능합니다. 흰 공은 6개잖아요.

흰 공 2개, 검은 공 1개를 골랐다면($\frac{{}_3C_2}{{}_4C_3}=\frac{3}{4}$) B에는 흰5검2이 있습니다. 이 중 5개 골라서 모두 흰 공인 확률은 $\frac{{}_5C_5}{{}_7C_5}=\frac{1}{21}$입니다. 따라서 $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{21}=\frac{1}{56}$입니다.

분모를 모두 더하면 $\frac{1}{8}+\frac{1}{56}=\frac{8}{56}$이네요.

이제 분자를 구해봅시다. 이 중에서 실행 1에서 고른 공이 흰 공 2개인 경우를 찾아보세요. 확률이 $\frac{1}{24}$인 경우랑 $\frac{1}{56}$인 경우죠? 따라서 구하는 확률은 $\frac{\frac{1}{24}+\frac{1}{56}}{\frac{8}{56}}=\frac{5}{12}$입니다. $p=12$, $q=5$로 $p+q=17$이네요.