

제 2 교시

수학 영역(B형)

5지선다형

1. 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 에 대하여 행렬 $A-B$ 의 모든 성분의 합이 5일 때, a 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. 좌표공간 위의 두 점 $A(-1, 0, -3)$, $B(2, 1, -1)$ 에 대하여 선분 AB 를 3:1로 외분하는 점이 $(a, b, 0)$ 일 때 $a-b$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. $\sin\theta\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{4}$ 일 때 $\cot\theta$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [2점]

① $\sqrt{3}$ ② $\sqrt{2}$ ③ 1 ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

4. 세 실수 a, b, c 가 이 순서대로 공차가 2인 등차수열을 이루고, $a, b, 4c$ 가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, b^2 의 값은? [3점]

① 4 ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{14}{3}$ ④ 5 ⑤ $\frac{16}{3}$

2

수학 영역(B형)

5. $f(2)=2$ 인 연속함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 할 때, 함수 $g(x)$ 는

$$g(x) = F(x^2 + 1)$$

을 만족한다. $g'(1)$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

6. 자연수 n 에 대하여 이항분포 $B(n, \frac{1}{3})$ 를 따르는 확률변수

X 의 확률질량함수를 $P(X=k)$ ($k=0, 1, 2, \dots, n$)라고 할 때,

$$\sum_{k=0}^n k^2 P(X=k) = 40 \text{ 이다. } n \text{의 값은? [3점]}$$

- ① 9 ② 18 ③ 27 ④ 36 ⑤ 45

7. 일차변환 f 를 나타내는 행렬이 $\begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & b \end{pmatrix}$ 이고 변환 f 에 의해 좌표평면 위의 모든 점은 직선 $y=2x$ 위의 점으로 옮겨질 때, 상수 a 와 b 에 대하여 $a+b$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

8. 두 사건 A, B 는 서로 독립이고

$$P(A \cup B) = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{1}{3}, P(A) = kP(A^c)$$

일 때, 상수 k 의 값은? [3점]

- ① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

9. 반지름의 길이가 각각 3, 1인 구 C_1, C_2 가 한 점 A에서 외접한다. 반지름의 길이가 2인 구 C_3 가 C_1, C_2 와 각각 점 B, C에서 외접할 때 삼각형 ABC의 넓이는? [3점]

- ① $\frac{6}{5}$ ② 1 ③ $\frac{6}{7}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

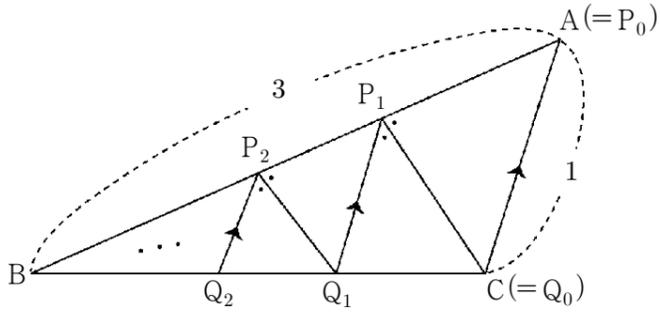
10. 어느 국가의 n 명의 몸무게를 조사한 결과 한 사람의

몸무게는 평균이 65kg이고
표준편차가 10kg인 정규분포를
따른다고 한다. 이 국가의 모든
국민의 몸무게를 95% 신뢰도로
추정한 신뢰구간의 길이가 4.9일
때 n 의 값은? [3점]

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.94	0.4738
1.96	0.4750
1.98	0.4761
2.0	0.4772

- ① 25 ② 36 ③ 49 ④ 64 ⑤ 81

11. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$ 이고 $\overline{AC}=1$ 인 삼각형 ABC가 있다.



선분 AB 위의 한 점 P_1 에 대해 P_1 을 지나고 선분 AC와 평행한 직선이 선분 BC와 만나는 점을 Q_1 이라 할 때 선분 P_1C 는 각 AP_1Q_1 을 이등분한다. 이와 같은 방법으로 자연수 n 에 대하여 $\overline{P_nC_n} \parallel \overline{AC}$ 이고 선분 P_nQ_{n-1} 이 각 AP_nQ_n 을 이등분하도록 선분 AB, AC 위에 각각 P_n, Q_n 을 정할 때,

$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{P_nQ_n}$ 의 값은? [3점]

- ① 1
- ② $\frac{3}{2}$
- ③ 2
- ④ $\frac{5}{2}$
- ⑤ 3

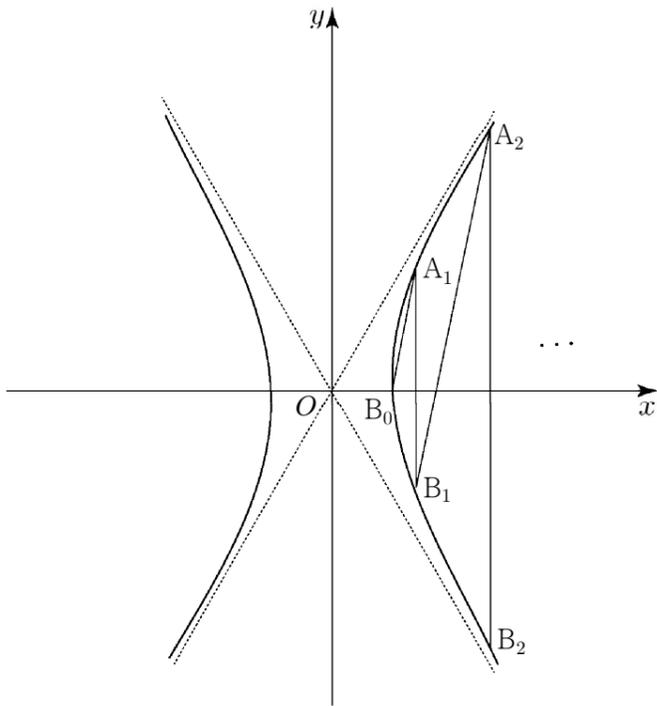
12. $f(1)=1$ 이고 역함수 $g(x)$ 가 존재하는 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) = \frac{1}{2} x f'(x)$$

을 만족한다. $\frac{1}{g'(-4)} + \frac{1}{g'(4)}$ 의 값은? [3점]

- ① 0
- ② 2
- ③ 4
- ④ 6
- ⑤ 8

[13~14] 다음은 주축의 길이가 2이고 두 직선 $y = \sqrt{3}x$, $y = -\sqrt{3}x$ 을 점근선으로 하는 쌍곡선 C 의 그래프를 나타낸 것이다. 음이 아닌 정수 n 에 대하여 점 B_n 을 지나고 기울기가 3인 직선이 쌍곡선 C 와 만나는 두 점 중 B_n 이 아닌 것을 A_{n+1} , A_{n+1} 을 x 축에 대해 대칭이동한 점을 B_{n+1} 이라 하자. 13번과 14번의 두 물음에 답하시오. (단, $B_0 = (1, 0)$ 이다.)



13. 쌍곡선 C 위의 x 좌표가 양수인 점 P 와 x 좌표가 음수인 점 Q 에 대하여 선분 PQ 가 원점 O 를 지난다. \overline{PQ} 의 최솟값을 k 라 할 때 $\overline{PQ} = nk$ 가 되도록 하는 점 P 의 x 좌표를 a_n 이라 하자. $\sum_{n=1}^8 a_n^2$ 의 값은? (단, n 은 자연수이다.) [3점]

- ① 57 ② 59 ③ 61 ④ 63 ⑤ 65

14. 선분 $A_{n+1}B_n$ 이 x 축과 만나는 점의 x 좌표를 p_n 이라 할 때, $p_{n+2} = ap_{n+1} + bp_n$ 을 만족한다. 다음은 상수 a 와 b 의 값을 구하는 과정이다.

쌍곡선 C 의 방정식을 구하면

$$x^2 - \frac{y^2}{(가)} = 1$$

한편, 쌍곡선의 대칭성에 의해 B_n 은 쌍곡선 위의 점이다.

선분 A_nB_n 이 x 축과 만나는 점을 C_n ,

선분 $A_{n+1}B_n$ 이 x 축과 만나는 점을 D_n 이라 하면

$$\angle A_nC_nD_{n-1} = \angle B_nC_nD_n = \frac{\pi}{2}, \quad \overline{A_nC_n} = \overline{B_nC_n},$$

$$\angle C_nA_nD_{n-1} = \angle C_nB_nD_n \text{ 이므로}$$

$$\triangle A_nC_nD_{n-1} \equiv \triangle B_nC_nD_n \text{ (ASA 합동)} \dots \textcircled{1}$$

이다. C_n 의 x 좌표를 q_n 이라 하면 ①에 의해

$$\frac{p_n + p_{n+1}}{2} = q_{n+1} \dots \textcircled{2}$$

이다. D_n 을 지나고 기울기가 3인 직선의 방정식을 구하면

$$y = 3(x - p_n)$$

이고 쌍곡선 C 의 방정식과 연립하면

$$2x^2 - (나) p_n x + 3p_n^2 + 1 = 0$$

이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$q_n + q_{n+1} = \frac{(나) p_n}{2} \dots \textcircled{3}$$

이다. ②와 ③에서 $p_{n+2} = ap_{n+1} + bp_n$ 이다.

위의 (가), (나)에 들어갈 수를 각각 α , β 라 할 때,

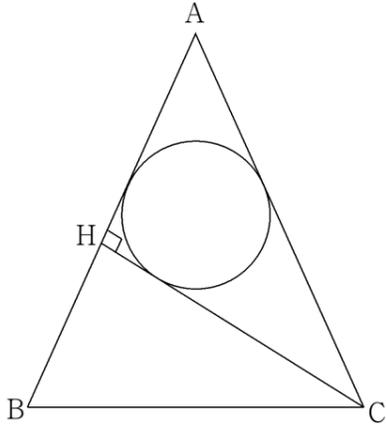
$\alpha + \beta + ab$ 의 값은? [4점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

6

수학 영역(B형)

15. 그림과 같이 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 이고 $\overline{BC} = 2$ 인 이등변삼각형 ABC가 있다.



각 BAC의 크기를 θ , 꼭짓점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 삼각형 AHC에 내접하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow +0} r(\theta)$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

16. 포물선 $y^2 = 4x$ 의 초점 $F(1, 0)$ 을 지나는 직선이 포물선과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자. 자연수 n 에 대하여 $\overline{FP} : \overline{FQ} = n : 1$ 이 되도록 하는 P와 Q에 대하여 선분 PQ의 중점의 x 좌표를 a_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

17. 두 이차정사각행렬 A, B 가

$$A^3 + BA^2 = E, \quad AB = A + E$$

를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, E 는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

- ㄱ. $AB = BA$
- ㄴ. B 의 역행렬이 존재한다.
- ㄷ. $A^4 = 2A - E$

- ① ㄴ
- ② ㄷ
- ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄱ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 81$ 위의 세 점 $A(-6, 6, -3), B(8, 1, 4), C(\alpha, \beta, \gamma)$ 에 대하여 삼각형 ABC 의 평면 $2x - 2y + z = 30$ 위로의 정사영의 넓이가 최대일 때 $\frac{\gamma^2}{\alpha^2}$ 의 값은? [4점]

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

19. $k > 1$ 인 정수 k 에 대하여 두 곡선 $y = k^x$, $y = k^{-2x}$ 이 직선 $y = n$ 과 만나는 점을 각각 P, Q라 할 때 선분 PQ 위의 점 중 x 좌표가 정수인 점의 개수를 a_n 이라 하자. $a_{n+1} - a_n > 1$ 을 만족하는 n 의 최솟값이 120일 때, k 의 값은? (단, n 은 1보다 큰 자연수이다.) [4점]

- ① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

20. 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = \cos x$ 이고

$$f(x) = f(p), \quad p < x$$

를 만족하는 실수 p 에 대하여 $x - p$ 의 최솟값을 $g(x)$ 라 하자.

$$h(x) = \int_{x-g(x)}^x |f(t) - f(x)| dt$$

로 정의되는 함수 $h(x)$ 가 구간 $[0, 2\pi]$ 에서 불연속인 점의 개수는? [4점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

21. 원점을 지나고 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $y=f(x)$ 가 양수 α 에 대하여

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha} = f'(\alpha) = f'(0)$$

을 만족할 때, 함수 $f(x)$ 의 극댓값이 존재하지 않도록 하는 양수 $f'(0)$ 의 최솟값을 $g(\alpha)$ 라 하자. $g(3)+g(9)$ 의 값은? [4점]

- ① $80\sqrt{3}$ ② $82\sqrt{3}$ ③ $84\sqrt{3}$
 ④ $86\sqrt{3}$ ⑤ $88\sqrt{3}$

단답형

22. 무리방정식 $x = \sqrt{x+6} + 6$ 의 실근을 구하시오. [3점]

23. 흰 공이 x 개, 검은 공이 6개 들어있는 주머니에서 임의로 2개의 공을 한꺼번에 꺼내었다. 이 시행에서 흰 공이 나오는 개수를 확률변수 X 라고 할 때, $E(X) = \frac{2}{3}$ 가 성립한다. x 의 값을 구하시오. [3점]

24. 한 변의 길이가 10인 정사각형 ABCD와 그 내부의 점 P가 다음 관계식을 만족한다.

$$\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} + 4\overrightarrow{PD} = \vec{0}$$

이 때, $|\overrightarrow{PB}|^2$ 의 값을 구하시오. [3점]

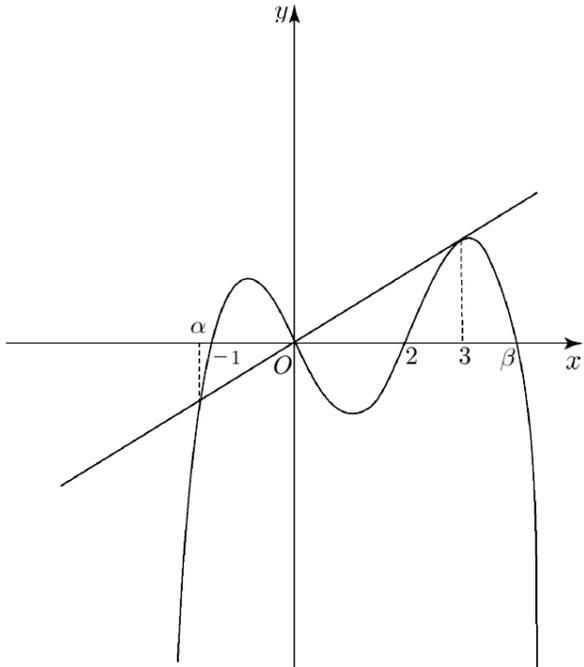
25. 원점 O에서 자기모멘트가 M인 자기쌍극자가 x축 방향으로 놓여있을 때 평면 위의 한 점 P에서의 자기장의 세기 H는

$$H = \frac{M}{r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2\theta}$$

와 같다. 여기서 $r = \overline{OP}$ 이고, θ 는 x축과 OP사이의 각이다. 두 점 $A(\sqrt{3}, 1)$, $B(2, 2\sqrt{3})$ 에서의 자기장의 세기를 각각 H_A , H_B 라 할 때, $\frac{H_A}{H_B} = 8\sqrt{\frac{q}{p}}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [3점]

26. 각각 1부터 15까지 자연수가 적혀 있는 15장의 카드가 있다. 이 중에서 10장의 카드를 선택할 때 카드에 적힌 수 중 적어도 여덟 개 이상의 자연수가 연속되게 뽑히는 경우의 수를 구하시오. (단, 뽑는 순서는 고려하지 않는다.) [4점]

27. $f(-1)=f(0)=f(2)=f(\beta)=0$ 을 만족하는 사차함수 $y=f(x)$ 와 직선 $y=g(x)$ 의 그래프의 일부가 다음과 같다.



방정식 $f(x)-g(x)=0$ 은 오직 세 실근 $\alpha, 0, 3$ 만을 가지며, $f'(3)=g'(3)$ 이다. 자연수 n 에 대하여 $x \in [-n, n]$ 일 때 부등식

$$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)} \leq x$$

을 만족하는 정수 x 의 개수를 a_n 이라 하자. $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값을 구하시오. (단, $-2 < \alpha < -1$ 이고 $3 < \beta < 4$ 이다.) [4점]

28. 점 P는 원점을 출발하여 매초 1의 속력으로 π 초 동안 x 축의 양의 방향을 따라 이동한다. 중심이 P이고, 두 곡선

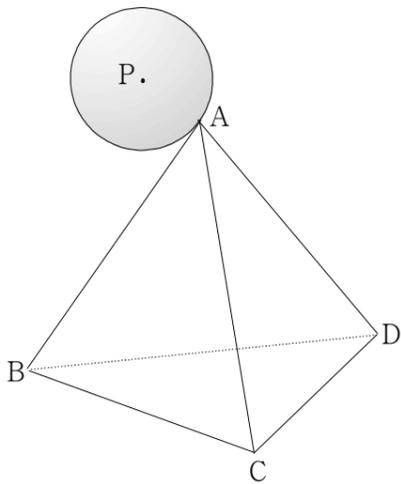
$$y = \sin x, y = -\sin x$$

에 동시에 접하는 원의 넓이를 S 라 할 때 t 초 후 S 의 시간에 대한 변화율 $\frac{dS}{dt}$ 의 값이 최대가 되게 하는 $t(0 < t < \pi)$ 의 값을 α 라 하자. $\alpha = a + b\pi$ 인 유리수 a, b 에 대하여 $24(a+b)$ 의 값을 구하시오. [4점]

29. 한 변의 길이가 $8\sqrt{3}$ 인 정사면체 ABCD와 반지름이 $3\sqrt{2}$ 이고 중심이 P인 구 S, 평면 α 가 다음 조건을 만족한다.

- (가) 구 S와 평면 ABC는 한 점 A에서만 만난다.
- (나) 평면 α 는 세 점 P, C, D를 포함한다.

평면 α 와 구 S가 만나서 생기는 도형을 R이라 하자. R의 평면 BCD위로의 정사영의 넓이를 $k\pi$ 라 할 때, $11k^2$ 의 값을 구하시오. (단, k는 상수이고 구와 정사면체는 한 점 A에서만 만난다.) [4점]



30. 자연수 n에 대하여

$$a_n = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x^n e^{-x^2} dx, \quad b_n = \sum_{k=1}^n a_{2k-1}$$

일 때, $\log b_n$ 의 지표가 2가 되도록 하는 n의 최솟값을 구하시오. [4점]

- * 확인 사항
- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.