

2016학년도 KUME FINAL 모의평가 문제지

# 수학 영역 (B형)

성명	
----	--

수험번호									
------	--	--	--	--	--	--	--	--	--

- 자신이 선택한 유형('A' 형/'B' 형)의 문제지인지 확인하십시오.
- 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰십시오.
- 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하십시오.

**Rome was not built in a day.**

- 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하십시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하십시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하십시오.  
배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하십시오.

**※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.**

# 2016학년도 KUME FINAL 모의평가

집필 고려대학교 수학교육과 수학문제연구부  
조용환 김민정 장재혁 이경민 황현정  
정수연 박성은 심준보 이동선 김정문  
심재운 신문성

본 모의평가에 대한 저작권은 고려대학교 수학교육과 수학문제연구부에게 있으며,  
저작권자의 허락 없이 전부 또는 일부를 영리적 목적으로 사용하거나 2차적 저작물  
작성 등으로 이용하는 일체의 행위는 정보통신망 이용촉진 및 정보보호, 저작권 관련  
법률에 따라 금지되어 있습니다.

## 제 2 교시

## 수학 영역(B형)

## 5지선다형

1. 두 행렬  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ 에 대하여 행렬  $A+B$ 의 모든 성분의 합은? [2점]

- ① 1      ② 2      ③ 3      ④ 4      ⑤ 5

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x^2+x}$ 의 값은? [2점]

- ① 1      ②  $\frac{1}{2}$       ③  $\frac{1}{3}$       ④  $\frac{1}{4}$       ⑤  $\frac{1}{5}$

3. 좌표공간에서 두 점  $A(1, 0, 2)$ ,  $B(0, a, -2)$ 에 대하여 선분 AB의 중점으로부터  $xz$ 평면까지의 거리가 2이다. 양수  $a$ 의 값은? [2점]

- ① 1      ② 2      ③ 3      ④ 4      ⑤ 5

4.  $\cos 2\theta = \frac{1}{3}$ 일 때,  $\tan^2 \theta$ 의 값은? [3점]

- ①  $\frac{1}{8}$       ②  $\frac{1}{4}$       ③  $\frac{3}{8}$       ④  $\frac{1}{2}$       ⑤  $\frac{5}{8}$

5. 좌표공간에 세 점  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(1, -2, a)$ ,  $B(-3, 1, 1)$ 에 대하여  $\overline{OA} \perp \overline{OB}$ 일 때,  $a$ 의 값은? [3점]

- ① 1      ② 2      ③ 3      ④ 4      ⑤ 5

6. 곡선  $y = e^{2x}$  위의 점  $(1, e^2)$ 에서의 접선의 방정식이  $y = ax + b$ 일 때,  $a - b$ 의 값은? (단,  $a, b$ 는 상수이다.) [3점]

- ①  $e^2$       ②  $2e^2$       ③  $3e^2$       ④  $4e^2$       ⑤  $5e^2$

7. 수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합을  $S_n$ 이라 하자.

$a_n = \frac{4}{4n^2 - 1}$ 일 때,  $S_4$ 의 값은? [3점]

- ①  $\frac{16}{9}$       ② 2      ③  $\frac{20}{9}$       ④  $\frac{22}{9}$       ⑤  $\frac{8}{3}$

8. 함수  $f(x) = 2\cos^2 x + \sqrt{3} \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$  의 최댓값은?

[3점]

- ① 1      ② 2      ③ 3      ④ 4      ⑤ 5

9. 두 사건  $A, B$ 에 대하여  $P(A) = P(A \cap B)$  이고

$$P(A^C) = 2P(B^C) = \frac{1}{2}$$

일 때,  $P(B-A)$ 의 값은? (단,  $A^C$ 는  $A$ 의 여사건이다.) [3점]

- ①  $\frac{1}{2}$       ②  $\frac{1}{3}$       ③  $\frac{1}{4}$       ④  $\frac{1}{5}$       ⑤  $\frac{1}{6}$

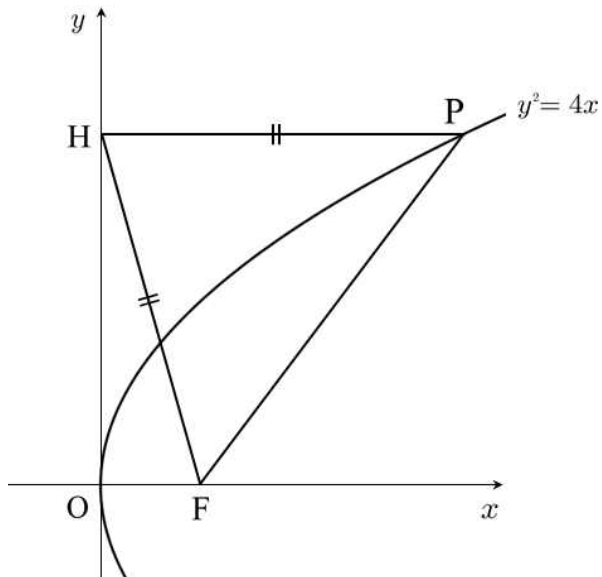
10. 함수

$$f(x) = \begin{cases} e^{k-x} + 1 & (x \geq 1) \\ 2x & (x < 1) \end{cases}$$

에 대하여, 함수  $f(1-x)$ 가  $x=0$ 에서 연속일 때, 상수  $k$ 의 값은? [3점]

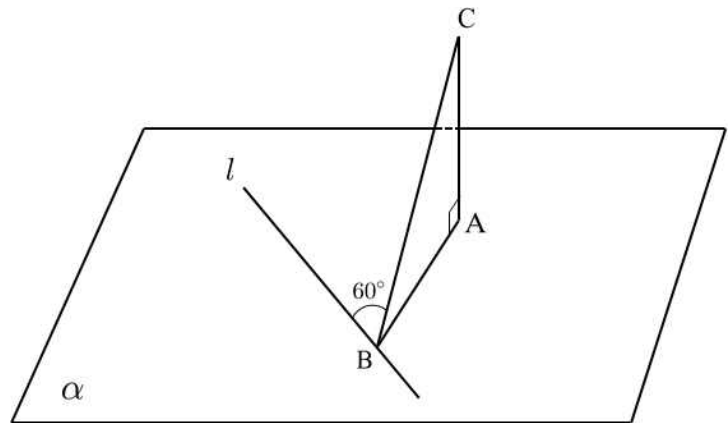
- ① 1      ② 2      ③ 3      ④ 4      ⑤ 5

11. 그림과 같이 초점이 F인 포물선  $y^2 = 4x$ 이 있다. 제 1 사분면에 있는 포물선 위의 점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H라고 하자.  $\overline{HF} = \overline{HP}$  일 때,  $\overline{PF} = p + \sqrt{q}$  이다.  $pq$ 의 값은? (단,  $p, q$ 는 자연수이다.) [3점]



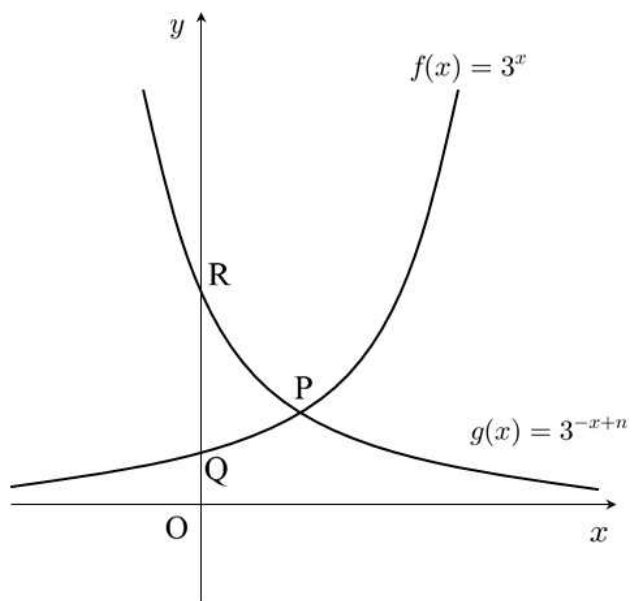
- ① 12
- ② 15
- ③ 18
- ④ 21
- ⑤ 24

12. 그림과 같이 평면  $\alpha$  위에 길이가 2인 선분 AB가 있다. 평면 위에 있지 않은 한 점 C에 대하여  $\overline{CA} \perp \alpha$ ,  $\overline{CA} = 2$ 이다. 점 B를 지나고 평면  $\alpha$  위에 있는 직선  $l$ 이 선분 CB와 이루는 각의 크기가  $60^\circ$  일 때, 직선  $l$ 과 점 C를 포함하는 평면과 평면  $\alpha$ 가 이루는 각의 크기를  $\theta$ 라고 하자.  $\tan \theta$ 의 값은? [3점]



- ① 1
- ②  $\sqrt{2}$
- ③  $\sqrt{3}$
- ④ 2
- ⑤  $\sqrt{5}$

13. 함수  $f(x) = 3^x$  와  $g(x) = 3^{-x+n}$ 의 그래프가 다음과 같다. 두 함수의 그래프의 교점을 P라고 하고 두 함수  $f(x)$ 와  $g(x)$ 가  $y$ 축과 만나는 점을 각각 Q, R이라고 할 때, 삼각형 PQR의 넓이를  $a_n$ 이라고 하자.  $\frac{a_{2n}}{a_n} \leq 100$ 을 만족시키는 자연수  $n$ 의 개수는? [3점]



- ① 1      ② 2      ③ 3      ④ 4      ⑤ 5

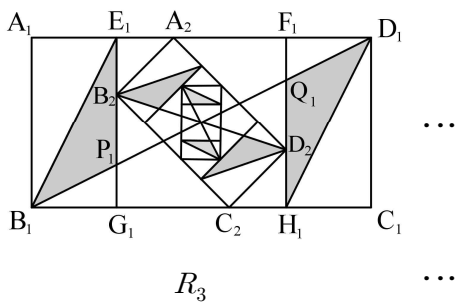
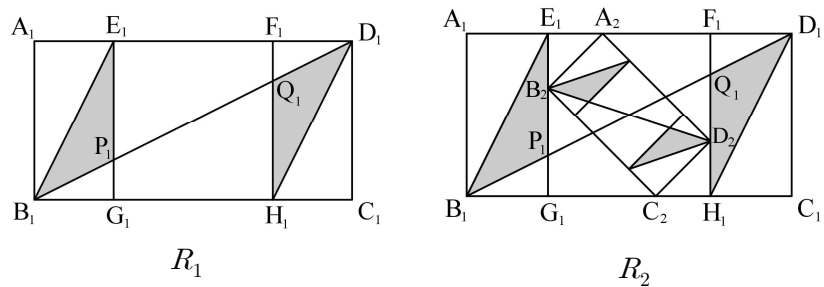
14. 만세 고등학교 학생 중에서 야구장을 가본 경험이 있는 학생의 비율을 알아보기 위하여 이 학교의 학생 중  $n$ 명을 임의 추출하여 조사한 결과  $k\%$ 가 야구장을 가본 경험이 있다고 답하였다. 이 결과를 이용하여 구한 이 학교 학생 전체의 야구장을 가본 비율에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이  $[a, b]$ 이다.  $b - a = 0.112$ 이고  $4.9k = n$ 일 때,  $k$ 의 값은? (단,  $Z$ 가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때,  $P(|Z| \leq 1.96) = 0.95$ 로 계산한다.) [4점]

- ① 40      ② 45      ③ 50      ④ 55      ⑤ 60

15. 직사각형  $A_1B_1C_1D_1$ 에서  $\overline{A_1B_1}=2$ ,  $\overline{B_1C_1}=4$ 이다. 선분  $A_1D_1$ 의 1:3 내분점과 3:1 내분점을 각각  $E_1, F_1$ 이라고 하고 선분  $B_1C_1$ 의 1:3 내분점과 3:1 내분점을 각각  $G_1, H_1$ 이라고 하자. 선분  $B_1D_1$ 이 선분  $E_1G_1$ , 선분  $F_1H_1$ 과 만나는 점을 각각  $P_1, Q_1$ 라 할 때, 삼각형  $B_1E_1P_1$ 과 삼각형  $D_1H_1Q_1$ 을 색칠하여 얻은 그림을  $R_1$ 이라 하자.

그림  $R_1$ 에 선분  $E_1F_1$  위의 점  $A_2$ , 선분  $E_1G_1$  위의 점  $B_2$ , 선분  $G_1H_1$  위의 점  $C_2$ , 선분  $H_1F_1$  위의 점  $D_2$ 를 꼭짓점으로 하고  $\overline{A_2B_2} : \overline{B_2C_2} = 1 : 2$ 인 직사각형  $A_2B_2C_2D_2$ 를 그리고, 직사각형  $A_2B_2C_2D_2$ 에서 그림  $R_1$ 을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 삼각형에 색칠하여 얻은 그림을  $R_2$ 라 하자.

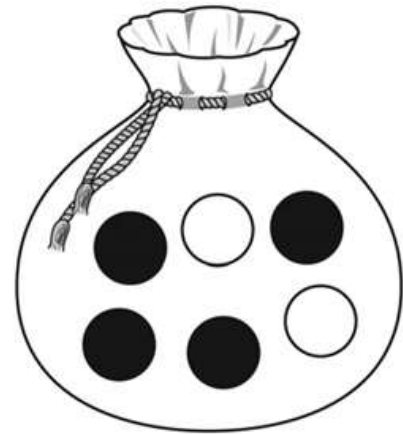
이와 같은 과정을 계속하여  $n$ 번째 얻은 그림  $R_n$ 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를  $S_n$ 이라 할 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ①  $\frac{27}{14}$                       ② 2                              ③  $\frac{29}{14}$
- ④  $\frac{15}{7}$                          ⑤  $\frac{31}{14}$

16. 주머니 속에 검은 공 4개, 흰 공 2개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼내는 시행을 한다. 세 번째 시행에서 꺼낸 공이 검은 공일 때, 첫 번째 시행에서 꺼낸 공이 흰 공이었을 확률은? (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.) [4점]

- ①  $\frac{3}{10}$                       ②  $\frac{2}{5}$                           ③  $\frac{1}{2}$                           ④  $\frac{3}{5}$                           ⑤  $\frac{7}{10}$





17. 수열  $\{a_n\}$ 은  $a_1 = -2$ 이고,  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$  라 할 때,

$$S_n + na_n = 2(n-1)(n+2) \quad (n \geq 2)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항  $a_n$ 을 구하는 과정이다.

$S_n + na_n = 2(n-1)(n+2) \quad (n \geq 2)$  에서  
 $S_{n+1} + (n+1)a_{n+1} = 2n(n+3)$   
 이므로  
 $S_{n+1} - S_n + (n+1)a_{n+1} - na_n = \boxed{\text{(가)}}$   
 이다. 식을 정리하면  
 $(n+2)a_{n+1} - na_n = \boxed{\text{(가)}} \quad (n \geq 2)$   
 이다. 양변에  $(n+1)$ 을 곱해주면  
 $(n+1)(n+2)a_{n+1} - n(n+1)a_n = (n+1) \times \boxed{\text{(가)}}$   
 이다.  $b_n = (n+1) \times \boxed{\text{(가)}}$  이라 하면  

$$n(n+1)a_n = 6a_2 + \sum_{k=2}^{n-1} b_k = 20 + \sum_{k=2}^{n-1} b_k \quad (\because a_2 = \frac{10}{3})$$

$$= 20 + 4 \sum_{k=1}^n \boxed{\text{(나)}} - 20$$

$$= 4 \sum_{k=1}^n \boxed{\text{(나)}} = \boxed{\text{(다)}} \quad (n \geq 3)$$
 이다.  $n=2$ 일 때에도 이 식을 만족시키므로  

$$a_n = \frac{\boxed{\text{(다)}}}{n(n+1)} \quad (n \geq 2)$$
 이다.

위의 (가), (나), (다)에 들어갈 식을 각각  $f(n), g(k), h(n)$

이라 할 때,  $\frac{g(2)h(5)}{f(4)}$ 의 값은? [4점]

- ① 22      ② 33      ③ 44      ④ 55      ⑤ 66

18. 두 이차정사각행렬  $A$ 와  $B$ 가

$$AB+B=O, \quad A^2B+2AB=A-E$$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?  
 (단,  $O$ 는 영행렬이고,  $E$ 는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ.  $AB=BA$   
 ㄴ.  $B-E$ 의 역행렬이 존재한다.  
 ㄷ.  $(A-B)(A^2+B^2)(A^4+B^4)=E-128B$

- ① ㄱ                      ② ㄴ                      ③ ㄱ, ㄴ  
 ④ ㄱ, ㄷ                ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. 서로 평행한 평면  $\alpha$ 와 직선  $l$ 의 사이의 거리가  $\sqrt{14}$ 이다.  
 직선  $l$  위의 두 점 A, B에 대하여  $\overline{AB}=4$ 이고 평면  $\alpha$  위의 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가)  $\overline{AP}=4\sqrt{2}$ ,  $\overline{BQ}=4$   
 (나)  $\angle BAP = \angle ABQ = 90^\circ$

삼각형 ABP의 평면 ABQ 위로의 정사영의 넓이를  $a$ 라 할 때, 서로 다른  $a$ 의 값의 합은? [4점]

- ① 12      ② 14      ③ 16      ④ 18      ⑤ 20

20. 자연수  $n$ 에 대하여 일차변환

$$f_n = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}^n$$

에 의하여 점  $A(0, 1)$ 가 옮겨지는 점을  $A_n$ 라 하자. 직선  $OA_n$ 과 중심이  $(0, k)$ 이고 반지름의 길이가 4인 원과의 교점의 개수를  $a_n$ 이라 하고,  $a_n$ 의 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합을

$S_n$ 이라 할 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = 1$ 이 되도록 하는 정수  $k$ 의 개수는?

[4점]

- ① 4      ② 6      ③ 8      ④ 10      ⑤ 12

21. 최고차항의 계수가 양수인 이차함수  $f(x)$ 에 대하여 함수  $g(x) = e^x f(x)$ 와 두 집합

$$A = \{x \mid g(x) = |x|\}, \quad B = \{g(x) \mid x \in A\}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때,  $4f(0)$ 의 값은? [4점]

(가)  $f(0) < 0$

(나)  $A - B = \{-1\}, B - A = \emptyset$

- ①  $e^{-1} - e$       ②  $e^{-1} - 2e$       ③  $2e^{-1} - e$   
 ④  $2e^{-1} - 2e$       ⑤  $2e^{-1} - 3e$

단답형

22. 부등식  $x \leq \frac{24}{x-2}$ 을 만족시키는 모든 자연수  $x$ 의 합을 구하시오. [3점]

23. 확률변수  $X$ 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$X$	1	2	3	계
$P(X=x)$	$2a$	$a$	$\frac{1}{4}$	1

$E(4X+2)$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 실수 전체에서 미분가능한 함수  $f(x)$ 에 대하여

$$\int_0^x f'(t)dt = \sin 2x, \quad f(0) = 1$$

이다.  $10f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 의 값을 구하시오. [3점]

25. 어느 공장의 일 생산량은 공장 내 압력에 영향을 받는다.

공장 생산량을  $W$ , 공장 내 압력을  $P$ 라고 할 때, 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$W = k - \log_3 \frac{P}{k} \quad (\text{단, } P > 0, k > 0)$$

두 공장  $A, B$ 에서 생산과정을 거쳤을 때 생산량을 각각  $W_A, W_B$ 라고 하고 공장 내 압력을 각각  $P_A, P_B$ 라 하자.

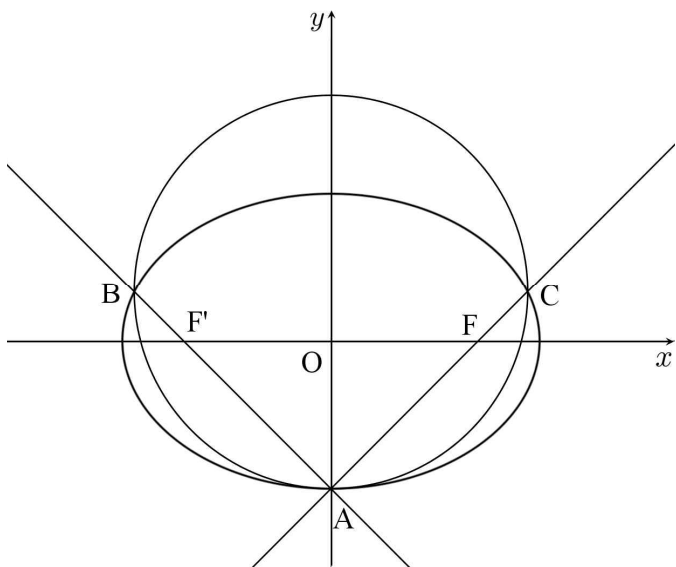
$P_B = 243P_A$ 일 때,  $W_A - W_B$ 의 값을 구하시오. [3점]

26. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수  $a, b, c$ 의 모든 순서쌍  $(a, b, c)$ 의 개수를 구하시오. [4점]

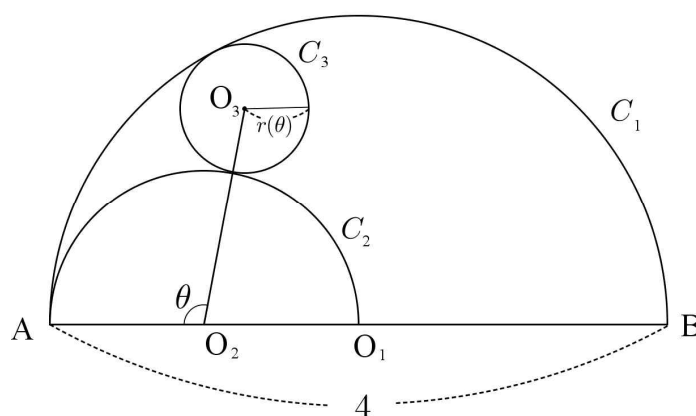
$$(가) \ a + b + c = 11$$

$$(나) \ ab \neq c, \ bc \neq a, \ ac \neq b$$

27. 그림과 같이 타원  $x^2+2y^2=9$ 의 두 초점을 각각  $F, F'$ 이라고 하고 타원이  $y$ 축과 만나는 점 중  $y$ 좌표가 음수인 점을  $A$ 라고 하자. 타원과 두 직선  $AF', AF$ 의 교점을 각각  $B, C$ 라 할 때, 세 점  $A, B, C$ 를 지나는 원의 둘레의 길이가  $k\pi$ 다.  $k^2$ 의 값을 구하시오. [4점]



28. 그림과 같이 길이가 4인 선분  $AB$ 를 지름으로 하는 반원  $C_1$ 의 중심을  $O_1$ 이라고 하고 선분  $AO_1$ 을 지름으로 하는 반원  $C_2$ 의 중심을  $O_2$ 라고 하자. 반원  $C_1$ 에 내접하고 반원  $C_2$ 에 외접하는 원  $C_3$ 의 중심  $O_3$ 에 대하여  $\angle AO_2O_3 = \theta$ 라고 할 때, 원  $C_3$ 의 반지름의 길이를  $r(\theta)$ 라고 하자.  $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\theta^2}{r(\theta)}$ 의 값을 구하시오. (단,  $0 < \theta < \frac{2}{3}\pi$ ) [4점]



29. 좌표공간에 구  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 와 점  $A(4, 0, 0)$ ,  $B(0, 4, 0)$ 가 있다. 직선  $AB$ 를 포함하고 중심과의 거리가 1인 평면과 구가 만나서 생기는 원을  $C$ 라 하자. 원  $C$  위의 한 점  $P$ 에서 구와 접하는 평면을  $\alpha$ 라 할 때, 삼각형  $ABP$ 의 평면  $\alpha$ 위로의 정사영의 넓이의 최댓값이  $\sqrt{p} + \sqrt{q}$ 이다.  $p+q$ 의 값을 구하시오. (단,  $p, q$ 는 자연수) [4점]

30. 삼차함수  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 실수  $k$ 의 값이 존재하지 않을 때, 100이하의 자연수  $a, b$ 의 모든 순서쌍  $(a, b)$ 의 개수를 구하시오. [4점]

$x \neq k$ 인 모든 실수  $x$ 에 대하여  $\int_k^x f(t) dt > 0$ 이다.



※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.