1번 문항(2023 시립대 논술기출)

세 점 P, Q, R은 한 변의 길이가 1인 정삼각형의 세 변 위를 시계 반대 방향으로 움직인다. 세 점 P, Q, R은 시각 $t=0$일 때 한 꼭짓점에서 동시에 출발하여 순서대로 1, $\sqrt{2}$, 2의 일정한 속력으로 움직인다. 시각 $t=\sqrt{2}$에서 시각 $t=2$까지 세 점 P, Q, R이 움직일 때, 삼각형 PQR의 넓이가 최대가 되는 시각과 최소가 되는 시각을 각각 구하여라.

2번 문항(2020 중앙 논술기출)

$\lim_{x \to 1} \frac{x^3+x^2-a}{(a-x)(x+1-a)} = b$를 만족하는 실수 a, b에 대하여, $a+b^2$의 최댓값, 최솟값을 구하시오.

(단, $\frac{3}{2} \leq a \leq 3$이다.)

3번 문항 (2022 시립대 논술기출)

다음 물음에 답하여라.

(a) 상수 a에 대하여 방정식 $x^3-6x^2+a=0$의 한 근이 t일 때, 나머지 두 근을 t에 대한 식으로 나타내어라.

(b) 좌표평면에서 직사각형 ABCD의 두 꼭짓점 A, D는 곡선 $y=-x^3+6x^2$에 있는 제1사분면의 점이고, 두 꼭짓점 B, C는 x축에 있다. 직사각형 ABCD의 넓이가 최대일 때, 변 AB의 길이를 구하여라.

4번 문항(2017학년도 한양대학교 논술기출)

$[0,\infty)$에서 정의되는 함수 $f(x)$가 다음과 같이 주어져 있다.

$$f(x)=\left(\frac{2x+1}{2x+2}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

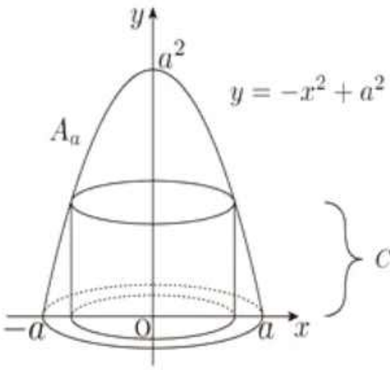
함수 $f(x)$의 최댓값을 구하시오.

5번 문항(2018학년도 중앙대학교 논술기출)

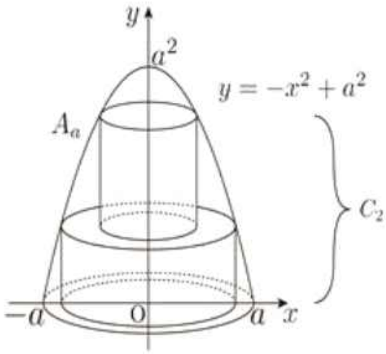
두 실수 x, y가 $x+y=8$, $-84 \le xy \le -65$를 만족한다. 다음 식의 최댓값 M과 최솟값 m을 구하시오.

$$(x^2+y^2+3xy)e^y$$

6번 문항 (2019학년도 경희대학교 논술기출)



[그림1]



[그림2]

(1) [그림 1] 에서와 같이 A_a의 내부에 있으면서 밑면이 A_a의 밑면과 평행한 원기둥 C_1을 만들 때, C_1의
부피의 최댓값 β_1을 구하고, 그 근거를 논술하시오.

(2) A_a의 내부에 있으면서 밑면이 A_a의 밑면과 평행한 원기둥을 [그림 2]에서처럼 쌓아서 만든 입체도형을
C_2라 하자. 이때, C_2의 부피의 최댓값 β_2을 구하고, 그 근거를 논술하시오.

7번 문항 (2019학년도 인하대학교 논술기출)

$0 < a < \frac{1}{2}$을 만족하는 실수인 상수 a에 대하여, 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 함수

$$f(x) = \frac{\cos x}{\frac{1}{2} - a\sin x}$$

라 하자. 함수 $f(x)$의 최솟값을 a로 표현하시오.

8번 문항 (2020학년도 이화여자대학교 논술기출)

닫힌구간 $[0, \pi]$에서 정의된 함수 $f(x) = e^x \sin x$가 있다.
$f(x)$가 $x = \theta$에서 최댓값 M을 가질 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) θ와 M을 구하시오.

(2) $n \geq 4$인 모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 보이시오.

$$f\left(\theta + \frac{1}{n}\pi\right) = Me^{\frac{1}{n}\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi - \sin\frac{1}{n}\pi\right)$$

(3) $n \geq 4$인 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$M^n e^{\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi - \sin\frac{1}{n}\pi\right)^n \frac{1}{n}\pi < \int_0^{\pi} \{f(x)\}^n dx < M^n \pi$$

(4) $\lim_{n \to \infty}\left(\int_0^{\pi} \{f(x)\}^n dx\right)^{\frac{1}{n}} = M$임을 보이시오. (단, $\lim_{n \to \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$)

9번 문항 (2019학년도 이화여자대학교 논술기출)

양의 실수 a에 대하여 $g(x)=\dfrac{1}{1+ax^2}$이고, 실수 전체의 미분가능한 함수 $f(x)$가 아래 조건을 만족시킨다.

$$f'(x)=g(x)+xg'(x),\ f(0)=0$$

다음 물음에 답하시오.

(1) 함수 $f(x)$를 구하시오.

(2) 함수 $f(x)$의 최댓값을 $M(a)$라고 할 때, $M(a)$를 구하시오.

(3) $M(a)$에 대하여 다음 극한값을 구하시오.

$$\lim_{n\to\infty}\left[M(n)\sum_{k=1}^{n}\{M(n)-M(n+k)\}\right]$$

10번 문항 (2017학년도 한양대학교 논술기출)

$n \geq 3$인 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x)=(1-x^n)^{\frac{1}{n}} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 한 점 $(x_0, f(x_0))$ $(0 < x_0 < 1)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 P, y축과 만나는 점을 Q라 하자. 다음 물음에 답하시오.

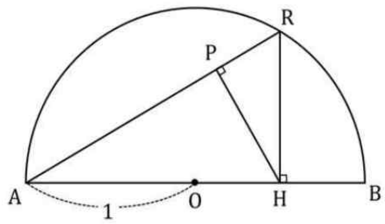
(1) $y=f(x)$ $(0 \leq x \leq 1)$ 위의 점 중에서 원점까지의 거리가 최대인 점을 A 라 하자. 점 A 의 좌표를 구하시오.

(2) 선분 PQ의 길이의 최솟값을 구하시오.

(3) 자연수 n에 대하여 $d_n = \int_0^1 (1-x^n)^{\frac{1}{n}} dx$라 할 때, $\lim_{n\to\infty} d_n$을 구하시오.

11번 문항 (2023학년도 한양대학교 논술기출)

오른쪽 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 점 O는 선분 AB의 중점이다. 호 AB 위의 한 점 R에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하고, 점 H에서 선분 AR에 내린 수선의 발을 P라 하자.



(1) $\angle \mathrm{ROB} = \frac{\pi}{3}$일 때, $\overline{\mathrm{OP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2$의 값을 구하시오.

(2) R가 A에서 B까지 호 AB위를 움직일 때, 선분 OP의 길이의 최솟값을 구하시오.

(3) 점 R가 A에서 B까지 호 AB위를 움직일 때, 점 P가 이루는 곡선과 선분 AB로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 선분 AB에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피를 구하시오.

12번 (2017학년도 한양대학교 논술기출)

양의 실수 a에 대하여 구간 $(-1, \infty)$에서 아래와 같이 정의된 함수 $f(x)$가 최솟값 $-\frac{1}{2}$을 갖는다.

$$f(x)=\int_0^x \frac{\ln(t+1)+a}{t+1}dt$$

(1) 실수 a의 값과 정적분 $\int_0^{e^2-1} \frac{\{\ln(x+1)+1\}\{f(x)\}^3}{x+1}dx$를 구하시오. (단, $a>0$)

(2) 세 직선 $x=0$, $x=e^{-3}-1$, $y=0$과 곡선 $y=f(x)$에 의해 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

(3) $x>0$일 때 부등식 $2f\left(\frac{2}{x}\right)>f\left(\frac{1}{x}\right)+f\left(\frac{3}{x}\right)$이 성립함을 보이시오.

13번 (2021학년도 중앙대학교 논술기출)

$a_0 = 3$이고, 자연수 i에 대하여 $a_i = 3 - i$인 수열이 있다. 음이 아닌 정수 n에 대하여 $b_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} a_k$라 할 때, b_n의 최솟값을 구하시오.

14번 문항 (2021 중앙 논술기출)

닫힌구간 $[0,\ \pi^2+2\pi]$에서 다음과 같이 정의된 함수 $f(x)$가 최솟값을 갖게 하는 x를 구하시오.

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+1}+1}{x+2(\sqrt{x+1}+1)\cos(\sqrt{x+1}-1)}$$

15번 문항 (2020 한양대 논술기출)

평면 위에 $\overline{AB}=2$인 점 A와 점 B가 있다. $\overline{AP}\times\overline{BP}=4$를 만족하는 평면 위의 점 P에 대하여

$\overline{AP}+\overline{BP}$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

16번 문항(2023 경희대 논술기출)

함수 $f(x) = -x + \frac{1}{x^2}$, $g(x) = -x^2 + k + \frac{1}{x}$에 대하여 다음 물음에 답하시오. (단, $x > 0$, k는 상
수이다.)

구간 $(0, \infty)$에서 함수 $y = x + \frac{1}{x}$의 증가와 감소를 표로 나타내시오. 이 결과를 이용하여 상수
k가 양수일 때 두 함수 $y = f(x)$와 $y = g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만남을 보이고,
그 근거를 논술하시오.

(단, $\lim_{x \to 0+}\left(x + \frac{1}{x}\right) = \infty$, $\lim_{x \to \infty}\left(x + \frac{1}{x}\right) = \infty$)

17번 문항(2023 중앙대 논술기출)

좌표평면 위를 움직이는 점 $\mathrm{A}(\cos t, \sin t)$와 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 점 $\mathrm{B}(x, y)$가 거리 1을 유지하며 연속적으로 움직인다. $t=0$일 때, 점 $\mathrm{B}(x, y)$는 제1사분면의 한 점에서 출발한다. $t=\frac{\pi}{2}$일 때, $\frac{dx}{dt}$의 값을 구하시오. 또한, 점 $\mathrm{B}(x, y)$의 x좌표의 최댓값을 구하시오. (단, $0 \le t \le \pi$이다.)

18번 문항(2022 서강대 논술기출)

다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$$ (단, x는 양의 실수)

1번 문항 해설

$\sqrt{2} \le t \le 2$에 대하여 삼각형 PQR의 넓이를 $S(t)$라 하자. $t=\frac{3}{2}$일 때 점 R이 삼각형의 한 꼭짓점에 있으므로 $\sqrt{2} \le t \le \frac{3}{2}$과 $\frac{3}{2} \le t \le 2$로 나누어 $S(t)$를 구한다.

(i) $\sqrt{2} \le t \le \frac{3}{2}$인 경우

$\sqrt{2} \le t \le \frac{3}{2}$인 경우 세 점 P,Q,R은 아래의 그림처럼 위치하게 된다. 따라서 삼각형 PQR의 넓이는

$$S(t)=\frac{1}{2}(2t-\sqrt{2}\,t)(2-t)\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{2})}{4}(-t^2+2t)$$

이다. 따라서 주어진 구간에서 $S(t)$는 감소한다.

(ii) $\frac{3}{2} \le t \le 2$인 경우

$\frac{3}{2} \le t \le 2$인 경우 세 점 P,Q,R은 아래의 그림처럼 위치하고, 삼각형 PQR의 넓이는

$$\begin{aligned} S(t)&=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}(2t-3)(3-\sqrt{2}\,t)\sin\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}(4-2t)(t-1)\sin\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}(\sqrt{2}\,t-2)(2-t)\sin\frac{\pi}{3} \\ &=\frac{\sqrt{3}}{4}\{(2+3\sqrt{2})t^2-(14+5\sqrt{2})t+18\} \end{aligned}$$

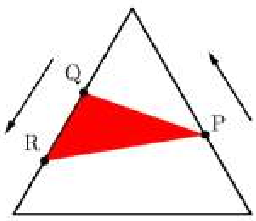
이다.

이차함수 $f(t)=\frac{\sqrt{3}}{4}\{(2+3\sqrt{2})t^2-(14+5\sqrt{2})t+18\}$는 $t=t_0=\frac{14+5\sqrt{2}}{2(2+3\sqrt{2})}=\frac{1+16\sqrt{2}}{14}$일 때 최솟값을 가진다. $\frac{3}{2}<t_0<2$이므로 $S(t)$는 $\frac{3}{2} \le t \le t_0$에서 감소하고 $t_0 \le t \le 2$에서 증가한다.

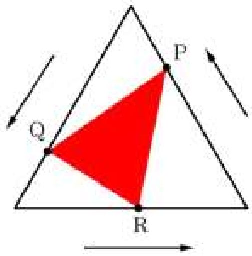
(i), (ii)에 의하여 $S(t)$는 $\sqrt{2} \le t \le 2$에서 $t=t_0$일 때 최솟값을 갖고 $t=\sqrt{2}$ 또는 2일 때 최댓값을 갖는다.

$$S(2)-S(\sqrt{2})=\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{2}-1)-\frac{\sqrt{3}}{2}(3\sqrt{2}-4)=\frac{\sqrt{3}}{2}(3-2\sqrt{2})>0$$

이므로 $S(t)$가 최대가 되는 시각은 2이고 최소가 되는 시각은 $\frac{1+16\sqrt{2}}{14}$이다.



(i) $\sqrt{2} \leq t \leq \dfrac{3}{2}$



(ii) $\dfrac{3}{2} \leq t \leq 2$

2번 문항 해설

$a\neq 2$이면 $x=1$에서 분모가 0이 아니므로 $\dfrac{2-a}{(a-1)(2-a)}=\dfrac{1}{a-1}=b$이다.

$a=2$이면 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+2x+2)}{(2-x)(x-1)}=5$이고 $(a,\ b)=(2,\ 5)$이다.

$a+b^2=k$로 놓고 $b=\dfrac{1}{a-1}$ ($\dfrac{3}{2}\leq a<2$, $2<a\leq 3$에서 정의된다)와 접점을 구해 보자. 접점에서 만나고 미분계수가 같다는 것을 이용하면 $-\dfrac{1}{2b}=-b^2$이므로 $b=2^{-\frac{1}{3}}$이다.

$\dfrac{1}{2}\leq b<1$, $1<b\leq 2$이므로 $b=2^{-\frac{1}{3}}$는 주어진 곡선의 접점이다. 이때, $a=1+2^{\frac{1}{3}}$이므로 $1+2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{2}{3}}$이다. 곡선의 양 끝점 $\left(\dfrac{3}{2},\ 2\right)$, $\left(3,\ \dfrac{1}{2}\right)$에서 각각 $a+b^2=\dfrac{11}{2}$, $\dfrac{13}{4}$이다. $(a,\ b)=(2,\ 5)$에서 27이다. 따라서 최솟값은 $1+2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{2}{3}}$이고 최댓값은 27이다.

[별해]

$a\neq 2$이면 $x=1$에서 분모가 0이 아니므로 $\dfrac{2-a}{(a-1)(2-a)}=\dfrac{1}{a-1}=b$이다.

$a=2$이면 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+2x+2)}{(2-x)(x-1)}=5$이고 $(a,\ b)=(2,\ 5)$이다.

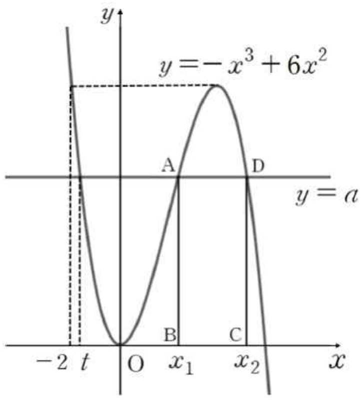
$\dfrac{1}{2}\leq b<1$, $1<b\leq 2$에서 $a=\dfrac{1}{b}+1$이므로 $f(b)=b^2+\dfrac{1}{b}+1$을 고려하자. $f'(b)=2b-\dfrac{1}{b^2}$이고 $b=2^{-\frac{1}{3}}$에서 극점을 갖고 $1+2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{2}{3}}$이다. 곡선의 양 끝점 2, $\dfrac{1}{2}$에서 각각 $\dfrac{11}{2}$, $\dfrac{13}{4}$이다. $(a,\ b)=(2,\ 5)$에서 27이다.

3번 문항 해설

(a) t가 방정식 $x^3-6x^2+a=0$의 근이므로 $t^3-6t^2+a=0$, $a=6t^2-t^3$이다. 따라서

$x^3-6x^2+a=x^3-6x^2+6t^2-t^3=(x-t)\{x^2-(6-t)x+t^2-6t\}=0$이므로

나머지 두 근은 $\dfrac{6-t\pm\sqrt{(6-t)^2-4(t^2-6t)}}{2}=\dfrac{6-t\pm\sqrt{-3t^2+12t+36}}{2}$ 이다.



(b) $B(x_1,\ 0)$, $C(x_2,\ 0)$, $\overline{AB}=a$라 하자. $x_1,\ x_2$는 방정식 $-x^3+6x^2=a$의 해이다. 방정식 $-x^3+6x^2=a$의 $x_1,\ x_2$가 아닌 다른 해를 t라 하자. $-2<t<0$이고 (a)에 의해

$$x_1=\frac{6-t-\sqrt{-3t^2+12t+36}}{2},\quad x_2=\frac{6-t+\sqrt{-3t^2+12t+36}}{2}$$

이므로 직사각형 ABCD의 넓이는 $a(x_2-x_1)=(-t^3+6t^2)\sqrt{-3t^2+12t+36}$ 이다.

$f(x)=(-x^3+6x^2)\sqrt{-x^3+12x+36}$,

$g(x)=\ln|f(x)|=2\ln|x|+\ln|x-6|+\dfrac{1}{2}\ln|3x^2-12x-36|$ 라 하자.

$$g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2}{x}+\frac{1}{x-6}+\frac{6x-12}{2(3x^2-12x-36)}=\frac{4(x^2-2x-6)}{x(x-6)(x+2)}$$

이고 방정식 $x^2-2x-6=0$의 근 중에서 $-2<x<0$인 것은 $x=1-\sqrt{7}$ 이다.

x	(-2)	$\cdots$	$1-\sqrt{7}$	$\cdots$	(0)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 $t=1-\sqrt{7}$에서 직사각형 ABCD는 최대 넓이를 갖고, 이때 변 AB의 길이는 $-(1-\sqrt{7})^3+6(1-\sqrt{7})^2=26-2\sqrt{7}$ 이다.

4번 문항 해설

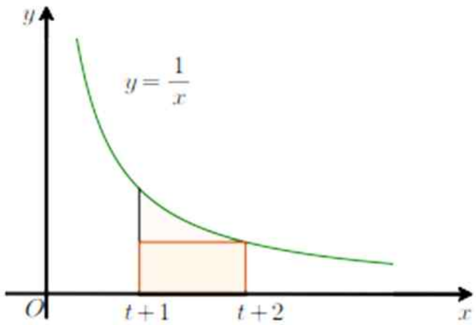
정답 : $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

양의 실수 t에 대하여

$$\frac{1}{t+2}+\ln(t+1)-\ln(t+2)=\int_{t+1}^{t+2}\left(\frac{1}{t+2}-\frac{1}{x}\right)dx$$

이다. 이때 함수 $\dfrac{1}{t+2}-\dfrac{1}{x}$는 구간 $[t+1,\ t+2]$에서 0보다 작거나 같기 때문에

적분값은 0보다 작다. 즉 $\displaystyle\int_{t+1}^{t+2}\left(\frac{1}{t+2}-\frac{1}{x}\right)dx<0$이다.



함수 $f(x)=\left(\dfrac{2x+1}{2x+2}\right)^{x+\frac{1}{2}}$의 양변에 로그를 취하면,

$$\ln f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)\{\ln(2x+1)-\ln(2x+2)\}$$

이다. 양변을 미분하면,

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left\{\frac{2}{2x+1}-\frac{2}{2x+2}\right\}+\ln(2x+1)-\ln(2x+2)$$

$$=\frac{1}{2(x+1)}+\ln(2x+1)-\ln(2x+2)$$

$$=\int_{2x+1}^{2x+2}\left(\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{t}\right)dt$$

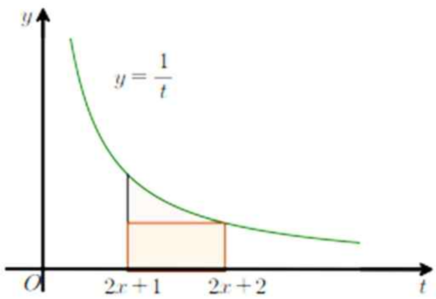
위의 식에서 피적분 함수 $h(t)=\dfrac{1}{2(x+1)}-\dfrac{1}{t}$는

구간 $[2x+1,\ 2x+2]$에서 0보다 작거나 같기 때문에,

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}<0$을 얻는다. 그리고 실수 $x\geq 0$에 대하여 $f(x)>0$이므로,

$f'(x)<0$이다. 즉 $f(x)$는 감소함수이다.

따라서 $f(x)\leq f(0)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로, 최댓값은 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이다.



5번 문항 해설

정답 : $-20e^{14}$

$x+y=8$에서 $y=8-x$. 이를 $-84 \le xy \le -65$에 대입하면 두 이차부등식

$x^2-8x-84 \le 0$, $x^2-8x-65 \le 0$이 얻어진다. 이를 풀면 $-6 \le x \le 14$, $x \ge 13$이거나

$x \le -5$의 범위가 얻어지고 따라서 x의 범위는 $13 \le x \le 14$, $-6 \le x \le -5$가 된다.

한편, 준식을 x에 대해 정리하면 $f(x)=(-x^2+8x+64)e^{8-x}$가 된다. 이를 x에 대해

미분하면

$(x^2-10x-56)e^{8-x}=(x-14)(x+4)e^{8-x}$가 되므로 준식은 $x=14$에서 극솟값, $x=-4$에서

극댓값을 가진다. 따라서 x의 범위를 고려하면 최댓값은 $x=-5$ 아니면 $x=13$인 경우 중

하나이고, 값을 비교하면 $x=13$일 때 $f(13)=-e^{-5}$의 값이 최댓값이 된다. 따라서

$M=-e^{-5}$.

같은 논리로, 최솟값은 $x=-6$ 아니면 $x=14$인 경우 중 하나이고, 값을 비교하면 $x=-6$일

때 $f(-6)=-20e^{14}$의 값이 최솟값이 된다. 따라서 $m=-20e^{14}$

6번 문항 해설

정답 : (1) $\frac{\pi}{4}a^4$ (2) $\frac{\pi}{3}a^4$

(1).

원기둥 C_1의 반지름의 길이를 r이라 할 때, r의 범위는 $0<r<a$이고 C_1의 부피는 $V(r)=\pi r^2(-r^2+a^2)$이다. 구간 $0<r<a$에서 $V(r)$의 최댓값을 구하기 위해 방정식 $V'(r)=2\pi r(-2r^2+a^2)=0$의 해 $r=\frac{a}{\sqrt{2}}$를 구한다. $V'(r)$은 $r=\frac{a}{\sqrt{2}}$의 좌우에서 양에서 음으로 바뀌기 때문에, C_1의 부피의 최댓값 β_1은 $V\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{4}a^4$이다.

(2).

오른쪽 그림처럼 아래 원기둥의 반지름을 r이라 하면, 아래 원기둥의 높이는 $-r^2+a^2$이다. 그러면 위에 놓일 수 있는 원기둥 부피의 최댓값은 A_r의 내부에 있는 원기둥 부피의 최댓값이다.

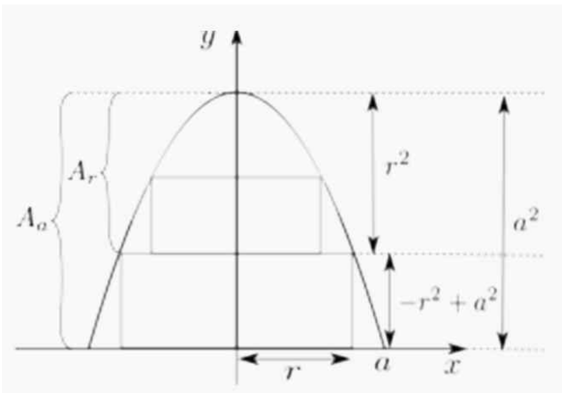
따라서 [논제 Ⅰ-1]의 결과에 의해 위 원기둥의 부피의 최댓값은 $\frac{\pi}{4}r^4$이다.

그러므로 C_2의 부피의 최댓값은

$V(r)=\pi r^2(-r^2+a^2)+\frac{\pi}{4}r^4=\pi\left(-\frac{3}{4}r^4+a^2r^2\right)$의 최댓값과 같다.

구간 $0<r<a$에서 함수 $V(r)$의 최댓값을 찾기 위해 방정식 $V'(r)=\pi(-3r^3+2a^2r)=0$을 풀면,

해 $r=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a$를 찾을 수 있다. 함수 $v'(r)$은 $r=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a$의 좌우에서 양에서 음으로 바뀌므로, C_2의 부피의 최댓값 β_2는 $V\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a\right)=\frac{\pi}{3}a^4$이다.



7번 문항 해설

정답 : $\dfrac{-2}{\sqrt{1-4a^2}}$

$f(x)$는 닫힌구간 $[0,\ 2\pi]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 2\pi)$에서 미분가능한 함수이므로 제시문 (가)에 의해 양 끝점과 극값에서 최솟값을 갖는다. 양 끝점에서 함숫값 $f(0)=2=f(2\pi)$이다. 극값을 구하기 위해 도함수를 구하면

$$f'(x)=\frac{-\sin x\left(\frac{1}{2}-a\sin x\right)-\cos x(-a\cos x)}{\left(\frac{1}{2}-a\sin x\right)^2}=\frac{a-\frac{1}{2}\sin x}{\left(\frac{1}{2}-a\sin x\right)^2}=0$$

이고 $0<2a<1$이므로 $\sin x=2a$의 해를 $x=\alpha$와 $x=\beta$ $(\alpha<\beta)$라 하면

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$이다. $0<x<\alpha$일 때 $f'(x)>0$, $\alpha<x<\beta$일 때 $f'(x)<0$,

$\beta<x<2\pi$일 때 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=\beta$에서 극솟값

$$f(\beta)=\frac{\cos\beta}{\frac{1}{2}-a\sin\beta}=\frac{-\sqrt{1-\sin^2\beta}}{\frac{1}{2}-a\sin\beta}=\frac{-\sqrt{1-(2a)^2}}{\frac{1}{2}-a(2a)}=\frac{-2}{\sqrt{1-4a^2}}$$

을 갖는다. 따라서 닫힌구간 $[0,\ 2\pi]$에서 $f(x)$의 최솟값은 $\dfrac{-2}{\sqrt{1-4a^2}}$이다.

8번 문항 해설

(1) 함수 $f(x)=e^x\sin x$를 미분하면 $f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)$이고,

$x=\frac{3}{4}\pi$에서만 $f'(x)=0$이다.

$x<\frac{3}{4}\pi$에서 $f'(x)>0$이므로 이 구간에서 $f(x)$가 증가하고 $x>\frac{3}{4}\pi$에서 $f'(x)<0$이므로 이 구간에서 $f(x)$가 감소한다.

그러므로 $f(x)$는 $x=\frac{3}{4}\pi$에서 최댓값 $f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=e^{\frac{3}{4}\pi}\sin\frac{3}{4}\pi=e^{\frac{3}{4}\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}$을 가진다.

따라서 $\theta=\frac{3}{4}\pi$이고 $M=e^{\frac{3}{4}\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}$이다.

(2) $f\left(\theta+\frac{1}{n}\pi\right)=Me^{\frac{1}{n}\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)$ 이므로

$$\begin{aligned}
f\left(\theta+\frac{1}{n}\pi\right)&=e^{\theta+\frac{1}{n}\pi}\sin\left(\theta+\frac{1}{n}\pi\right)\\
&=e^{\theta+\frac{1}{n}\pi}\left\{\sin\theta\cos\frac{1}{n}\pi+\cos\theta\sin\frac{1}{n}\pi\right\}\\
&=e^{\frac{3}{4}\pi}\cdot e^{\frac{1}{n}\pi}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{1}{n}\pi-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{1}{n}\pi\right\}\\
&=e^{\frac{3}{4}\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{\frac{1}{n}\pi}\left\{\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right\}\\
&=M\cdot e^{\frac{1}{n}\pi}\left\{\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right\}
\end{aligned}$$

(3) 오른쪽 부등식: $x \in [0,\ \pi]$에 대하여 $0 \le f(x) \le M$이므로 $0 \le \{f(x)\}^n \le M^n$이 성립하고 $f(x)$가 상수함수가 아니므로, 구간 $[0,\ \pi]$에서 적분하면

$$\int_0^n \{f(x)\}^n dx < \int_0^\pi M^n\, dx = M^n \pi$$

이다.

왼쪽 부등식: $n \ge 4$일 때, $\frac{3}{4}\pi < \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{n}\pi \le \pi$이고 $f(x)$가 구간 $\left[\frac{3}{4}\pi,\ \pi\right]$에서 감소하므로 구간 $\left[\frac{3}{4}\pi,\ \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{n}\pi\right]$에 속한 x에 대하여

$$f(\pi) \le f\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{n}\pi\right) \le f(x)$$

이다. 따라서

$$0 \le Me^{\frac{1}{n}\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi - \sin\frac{1}{n}\pi\right) \le f(x)$$

가 성립한다. 구간 $\left[\frac{3}{4}\pi,\ \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{n}\pi\right]$에서

$$\left\{Me^{\frac{1}{n}\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi - \sin\frac{1}{n}\pi\right)\right\}^n = M^n e^\pi \left(\cos\frac{1}{n}\pi - \sin\frac{1}{n}\pi\right)^n \le \{f(x)\}^n$$

이므로 위의 부등식을 적분하면

$$M^n e^\pi \left(\cos\frac{1}{n}\pi - \sin\frac{1}{n}\pi\right)^n \frac{1}{n}\pi = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{n}\pi} M^n e^\pi \left(\cos\frac{1}{n}\pi - \sin\frac{1}{n}\pi\right)^n dx \le \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{n}\pi} \{f(x)\}^n dx$$

가 성립한다. 그리고 구간 $\left[\frac{3}{4}\pi,\ \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{n}\pi\right]$가 $[0,\ \pi]$의 부분집합이고 $f(x) \ge 0$이므로

$$\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{n}\pi} \{f(x)\}^n dx < \int_0^\pi \{f(x)\}^n dx$$

가 성립한다. 위의 두 부등식으로부터

$$M^n e^\pi \left(\cos\frac{1}{n}\pi - \sin\frac{1}{n}\pi\right)^n \frac{1}{n}\pi < \int_0^\pi \{f(x)\}^n dx$$

를 얻는다. 그러므로 $n \ge 4$에 대하여

$$M^n e^\pi \left(\cos\frac{1}{n}\pi - \sin\frac{1}{n}\pi\right)^n \frac{1}{n}\pi < \int_0^\pi \{f(x)\}^n dx < M^n \pi$$

가 성립한다.

(4) 문항 1-(3)의 부등식

$$M^n e^\pi \left(\cos\frac{1}{n}\pi - \sin\frac{1}{n}\pi\right)^n \frac{1}{n}\pi < \int_0^\pi \{f(x)\}^n dx < M^n \pi$$

에 $\sqrt[n]{\ }$을 적용하면

$$\left(M^n e^{\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi - \sin\frac{1}{n}\pi\right)^n \frac{1}{n}\pi\right)^{\frac{1}{n}} < \left(\int_0^{\pi}\{f(x)\}^n dx\right)^{\frac{1}{n}} < \left(M^n\pi\right)^{\frac{1}{n}} = M\cdot\pi^{\frac{1}{n}}$$

이다. 위 부등식의 왼쪽 부분을 정리하면

$$\left(M^n e^{\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)^n\frac{1}{n}\pi\right)^{\frac{1}{n}}=Me^{\frac{\pi}{n}}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}\pi^{\frac{1}{n}}$$

이므로, 위의 부등식을 다시 쓰면

$$Me^{\frac{\pi}{n}}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}\pi^{\frac{1}{n}}<\left(\int_0^{\pi}\{f(x)\}^n dx\right)^{\frac{1}{n}}<M\cdot\pi^{\frac{1}{n}}$$

이고, 극한값의 대소관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}Me^{\frac{\pi}{n}}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}\pi^{\frac{1}{n}}\le\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{\pi}\{f(x)\}^n dx\right)^{\frac{1}{n}}\le\lim_{n\to\infty}M\cdot\pi^{\frac{1}{n}}$$

이 된다.

여기에서 π와 e는 상수이므로

$$\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\pi}{n}}=1\text{과 }\lim_{n\to\infty}\pi^{\frac{1}{n}}=1$$

을 얻고, 또한

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)=\cos 0-\sin 0=1$$

이며, 주어진 조건에 의하여 $\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$이다. 그러므로

$$\lim_{n\to\infty}Me^{\frac{\pi}{n}}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}\pi^{\frac{1}{n}}=M$$

이고,

$$\lim_{n\to\infty}M\cdot\pi^{\frac{1}{n}}=M$$

이다.

따라서 위의 부등식은

$$M\le\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{\pi}\{f(x)\}^n dx\right)^{\frac{1}{n}}\le M$$

이다.

그러므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{\pi}\{f(x)\}^n dx\right)^{\frac{1}{n}}=M$이다.

9번 문항 해설

정답 : (1) $f(x)=\dfrac{x}{1+ax^2}$ (2) $M(a)=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ (3) $\dfrac{1}{4}(3-2\sqrt{2})$

(1) 먼저 주어진 도함수 $f'(x)$에 대한 적분을 다음과 같이 2개의 적분으로 분리한다.

$$\int f'(x)dx=\int\frac{1}{1+ax^2}\left(1-\frac{2ax^2}{1+ax^2}\right)dx$$
$$=\int\frac{1}{1+ax^2}dx+\int\frac{-2ax^2}{(1+ax^2)^2}dx \qquad (A)$$

그리고 위의 두 번째 적분을 부분적분법을 이용하여 다음과 같이 계산한다.

즉 $u(x)=x,\ v'(x)=\dfrac{-2ax}{(1+ax^2)^2}$로 놓으면 $u'(x)=1,\ v(x)=\dfrac{1}{1+ax^2}$이므로,

$$\int\frac{-2ax^2}{(1+ax^2)^2}dx=\int x\frac{-2ax}{(1+ax^2)^2}dx=\int u(x)v'(x)dx$$

$$=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)dx$$

$$=\frac{x}{1+ax^2}-\int\frac{1}{1+ax^2}dx$$

위의 결과를 수식 (A)에 대입하여 $f(x)=\dfrac{x}{1+ax^2}+C$가 성립함을 알 수 있다.

주어진 조건 $f(0)=0$으로부터 $C=0$이므로 $f(x)=\dfrac{x}{1+ax^2}$이다.

(2) 함수 $f(x)=\dfrac{x}{1+ax^2}$이므로, (ⅰ) $x\le 0$일 때 $f(x)\le 0$; (ⅱ) $x>0$일 때 $f(x)>0$이다.

그러므로 $f(x)$의 최댓값은 $x>0$의 범위에서 찾으면 된다.

먼저 $f'(x)=\dfrac{1-ax^2}{(1+ax^2)^2}$이므로, $f'(x)$의 부호의 변화를 조사하여 다음을 알 수 있다.

(ⅰ) $x=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$일 때, $f'(x)=0$이며 $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

(ⅱ) $0<x<\dfrac{1}{\sqrt{a}}$일 때, $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 이 영역에서 증가한다.

(ⅲ) $x>\dfrac{1}{\sqrt{a}}$일 때, $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 이 영역에서 감소한다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$일 때, 최댓값 $M(a)=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$을 갖는다.

(3) 문제 (2)에 의해, 주어진 자연수 k에 대해, $M(k)=\dfrac{1}{2\sqrt{k}}$이다.

$$M(n)\sum_{k=1}^{n}\{M(n)-M(n+k)\}=\frac{1}{2\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}-\frac{1}{2\sqrt{n+k}}\right)=\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+k}}\right) = \frac{1}{4}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}\right)$$

따라서 구분구적법에 의해 다음의 결과를 얻게 된다.

$$\lim_{n\to\infty} M(n)\sum_{k=1}^{n}\{M(n) - M(n+k)\} = \frac{1}{4}\int_0^1\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+t}}\right)dt = \frac{1}{4}\left[t - 2\sqrt{1+t}\,\right]_0^1 = \frac{1}{4}(3 - 2\sqrt{2})$$

10번 문항 해설

정답 : (1) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}},\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)$ (2) $\sqrt{2}\cdot 2^{\frac{n-1}{n}}$ (3) 1

(1) 원점 $(0,\ 0)$과 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x,\ f(x))$ 사이의 거리의 제곱을 $g(x)$ $(0 \le x \le 1)$라 하자.

함수 $g(x)$의 정의에 의해 $g(x)=x^2+(1-x^n)^{\frac{2}{n}}$이다.

$g(0)=1$, $g(1)=1$이고, $g'(x)=2x-2(1-x^n)^{\frac{2}{n}-1}x^{n-1}$이다. $0<x<1$일 때

$g'(x)>0 \Leftrightarrow x-(1-x^n)^{\frac{2}{n}-1}x^{n-1}>0 \Leftrightarrow x^{2-n}-(1-x^n)^{\frac{2-n}{n}}>0 \Leftrightarrow x^{2-n}>(1-x^n)^{\frac{2-n}{n}} \Leftrightarrow x<(1-x^n)^{\frac{1}{n}}$ $(n \ge 3$이므로$)$

$$\Leftrightarrow x^n<1-x^n \Leftrightarrow x^n<\frac{1}{2} \Leftrightarrow x<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$$

비슷한 방법으로 $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$, 그리고 $g'(x)<0 \Leftrightarrow x>\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$임을 확인할 수 있다.

따라서 $x=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$에서 $g(x)$가 최대가 된다.

$f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$이므로 원하는 점 A의 좌표는 $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}},\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)$이다.

(2) $0<x<1$일 때, $f'(x)=-(1-x^n)^{\frac{1-n}{n}}x^{n-1}<0$이다.
곡선 $y=f(x)$의 한 점 $(x_0,\ f(x_0))$의 접선의 방정식은 $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$
점 P의 좌표를 $(p,\ 0)$, 점 Q의 좌표를 $(0,\ q)$이라 하면
$0=f'(x_0)(p-x_0)+f(x_0)$, $q=f'(x_0)(0-x_0)+f(x_0)$

따라서 $p=\dfrac{f(x_0)-x_0f'(x_0)}{-f(x_0)}$, $q=f(x_0)-x_0f'(x_0)$

즉, 점 P의 좌표는 $\left(\dfrac{f(x_0)-x_0f'(x_0)}{-f(x_0)},\ 0\right)$, 점 Q의 좌표는 $(0,\ f(x_0)-x_0f'(x_0))$이다.

이로부터 선분 PQ의 길이의 제곱을 $h(x_0)$라 하면

$h(x_0)=\dfrac{|f(x_0)-x_0f'(x_0)|^2}{|f'(x_0)|^2}\left(1+(f'(x_0))^2\right)$ $(0<x_0<1)$을 얻는다.

한편

$|f(x_0)-x_0f'(x_0)|=\left|(1-{x_0}^n)^{\frac{1}{n}}+{x_0}^n(1-{x_0}^n)^{\frac{1-n}{n}}\right|=(1-{x_0}^n)^{\frac{1-n}{n}}$, $|f'(x_0)|=(1-{x_0}^n)^{\frac{1-n}{n}}{x_0}^{n-1}$
이므로 정리하면

$h(x_0)=\left(\dfrac{1}{x_0}\right)^{2(n-1)}+(1-{x_0}^n)^{\frac{2(1-n)}{n}}$

선분 PQ의 길이의 최솟값을 찾기 위해서는 구간 $(0,\ 1)$에서의 $h(x)$의 최솟값을 찾으면

충분하다.
x가 0 또는 1로 수렴함에 따라 $h(x)$는 양의 무한대로 발산한다.

또한 $h'(x)=2(1-n)\left(x^{1-2n}-(1-x^n)^{\frac{2-3n}{n}}x^{n-1}\right)$이므로, $0<x<1$일 때

$h'(x)>0 \Leftrightarrow x^{1-2n}-(1-x^n)^{\frac{2-3n}{n}}x^{n-1}<0$ ($n\geq 3$이므로)

$\Leftrightarrow x^{2-3n}-(1-x^n)^{\frac{2-3n}{n}}<0 \Leftrightarrow x^{2-3n}<(1-x^n)^{\frac{2-3n}{n}}$

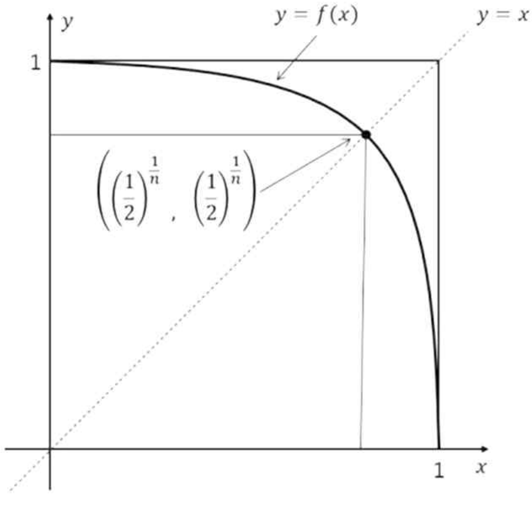
$\Leftrightarrow x>(1-x^n)^{\frac{1}{n}}$ ($n\geq 3$이므로) $\Leftrightarrow x^n>1-x^n \Leftrightarrow x^n>\frac{1}{2} \Leftrightarrow x>\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$

비슷한 방법으로 $h'(x)=0 \Leftrightarrow x=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$, 그리고 $h'(x)<0 \Leftrightarrow x<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$ 임을 확인할 수 있다.

따라서 $x=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$에서 $h(x)$가 최소가 되고 $h\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)=2\cdot 4^{\frac{n-1}{n}}$이다.

선분 PQ의 길이의 최솟값은 $h\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)$의 양의 제곱근인 $\sqrt{2}\cdot 2^{\frac{n-1}{n}}$이다.

(3) $0<x<1$일 때 $f(x)>0$, $f'(x)<0$이고, $f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$



따라서 $0<x<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$이면 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}<f(x)<1$이다. 이로부터

(한 변의 길이가 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$인 정사각형의 넓이)$=\int_0^{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}dx$

$\leq \int_0^{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}}f(x)dx \leq \int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(1-x^n)^{\frac{1}{n}}dx \leq \int_0^1 1\,dx$

=(한 변의 길이가 1인 정사각형의 넓이)

를 얻는다. 정리하면 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{n}} \leq d_n \leq 1$

이때 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{n}}=1$이므로 제시문 <다>에 의해 $\lim_{n\to\infty}d_n=1$

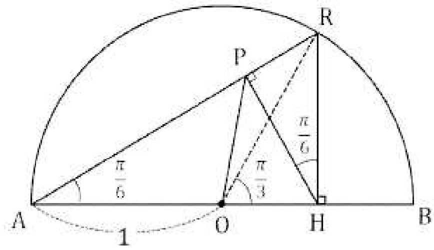
11번 문항 해설

정답 : (1) $\frac{13}{8}$ (2) $\frac{\sqrt{33}}{9}$ (3) $\frac{8}{15}$

(1) 오른쪽 그림에서 $\overline{\mathrm{AR}}^2 = 1^2+1^2-2\times1\times1\times\cos\frac{2\pi}{3}=3$이다.

$\overline{\mathrm{AR}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{RH}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\overline{\mathrm{PR}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$이다. 따라서

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{3}{4}\sqrt{3}$이다.



$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{OP}}^2 &= \overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{OA}}^2-2\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\cos\frac{\pi}{6}\\ &=\left(\frac{3}{4}\sqrt{3}\right)^2+1^2-2\times\frac{3}{4}\sqrt{3}\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{7}{16}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{BP}}^2 &= \overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{AB}}^2-2\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\cos\frac{\pi}{6}\\ &=\left(\frac{3}{4}\sqrt{3}\right)^2+2^2-2\times\frac{3}{4}\sqrt{3}\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{19}{16}\end{aligned}$$

따라서 $\overline{\mathrm{OP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2=\frac{7}{16}+\frac{19}{16}=\frac{13}{8}$

(2) 지름의 양 끝점이 $\mathrm{A}(-1,0)$, $\mathrm{B}(1,0)$가 되고, 호 AB가 x축 윗부분에 오도록 반원을 좌표평면에 두자. $\angle\mathrm{ROB}=t\,(0\le t\le\pi)$라 하면, $\mathrm{R}(\cos t,\sin t)$, $\mathrm{H}(\cos t,0)$이라 할 수 있다.

$0<t<\pi$일 때, 두 점 $\mathrm{A}(-1,0)$, $\mathrm{R}(\cos t,\sin t)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y-0=\frac{\sin t-0}{\cos t-(-1)}(x-(-1))$$

이고, 점 H를 지나고 선분 AR에 수직인 직선의 방정식은

$$y-0=-\frac{1+\cos t}{\sin t}(x-\cos t)$$

이다. 점 P는 이 두 직선의 교점이므로 두 직선의 방정식을 연립해서 풀면, 점 $\mathrm{P}(x,y)$의 좌표는 아래와 같이 주어진다.

$$\begin{cases}x=\frac{1}{2}(\cos^2 t+2\cos t-1)\\ y=\frac{1}{2}\sin t(1+\cos t)\end{cases}\quad (t=0\text{이면 } \mathrm{P}=\mathrm{B},\ t=\pi\text{이면 } \mathrm{P}=\mathrm{A}\text{이다.})$$

따라서 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left\{\frac{1}{2}(\cos^2 t+2\cos t-1)\right\}^2+\left\{\frac{1}{2}\sin t(1+\cos t)\right\}^2}$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}(\cos^3 t+\cos^2 t-\cos t+1)}$$

이고 $f(t)=\cos^3 t+\cos^2 t-\cos t+1$이라 하면, $f'(t)=-\sin t(\cos t+1)(3\cos t-1)$이고, $0\le t\le\pi$일 때 $-1\le\cos t\le1$이므로,

오른쪽 표에서 $f(t)$의 최솟값은 $t=\alpha$, $\cos\alpha=\frac{1}{3}$일 때, $f(t)=\frac{22}{27}$이다.

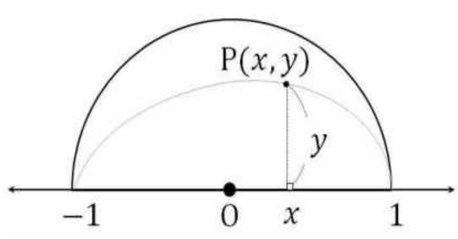
따라서 구하는 $\overline{\mathrm{OP}}$의 최솟값은

$\sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{22}{27}}=\frac{\sqrt{11}}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{33}}{9}$ 이다.

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$	π
$\cos t$	1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	-1
$f'(t)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(t)$	2	$\searrow$	$\frac{22}{27}$	$\nearrow$	2

(3) (2)번에서 구한 $\mathrm{P}(x, y)$의 좌표로부터,

$\cos t=-1+\sqrt{2+2x}$ 이고,



$$y^2=\left\{\frac{1}{2}\sin t(1+\cos t)\right\}^2=\frac{1}{4}(1-\cos t)(1+\cos t)^3$$
$$=\frac{1}{4}(2-\sqrt{2+2x})(\sqrt{2+2x})^3=\sqrt{2}(1+x)^{\frac{3}{2}}-(1+x)^2$$

이다. $-1\le x\le 1$이므로 구하는 부피는

$$\int_{-1}^{1}y^2dx=\int_{-1}^{1}\sqrt{2}(1+x)^{\frac{3}{2}}dx-\int_{-1}^{1}(1+x)^2dx=\left[\frac{2\sqrt{2}}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{3}(1+x)^3\right]_{-1}^{1}=\frac{8}{15}$$ 이다.

12번 문항 해설

(1) 64 (2) $-\frac{9}{2}e^{-3}$ (3) 해설참조

(1)

$$f(x)=\int_0^x \frac{\ln(t+1)+a}{t+1}dt=\int_a^{\ln(x+1)+a} s\,ds=\left[\frac{1}{2}s^2\right]_a^{\ln(x+1)+a}=\frac{1}{2}(\ln(x+1)+a)^2-\frac{1}{2}a^2\geq-\frac{1}{2}a^2$$

이고, $x=e^{-a}-1$에서 최솟값 $-\frac{1}{2}a^2$을 갖는다. 따라서 $a=1$이고,

$f(x)=\frac{1}{2}[\ln(x+1)]^2+\ln(x+1)$이다.

$f(x)$를 미분하면, $f'(x)=\ln(x+1)\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}=\frac{\ln(x+1)+1}{x+1}$이다.

정적분 $\int_0^{e^2-1}\frac{[\ln(x+1)+1][f(x)]^3}{x+1}dx$을 구하기 위하여, $f(x)=t$로 치환하여 적분하면,

$$\int_0^{e^2-1}\frac{[\ln(x+1)+1][f(x)]^3}{x+1}dx=\int_0^4 t^3dt=\left[\frac{1}{4}t^4\right]_0^4=4^3=64\text{이다.}$$

(2) $f(x)$와 x축과의 교점을 구하면,

$$f(x)=0 \Rightarrow \frac{1}{2}(\ln(x+1))^2+\ln(x+1)=0 \Rightarrow \ln(x+1)=0 \text{ 또는 } -2 \Rightarrow x=0 \text{ 또는}$$

$x=e^{-2}-1$

따라서 구하고자 하는 정적분은 다음과 같이 나눌 수 있다.

$$\int_{e^{-3}-1}^0 |f(x)|dx=\int_{e^{-3}-1}^{e^{-2}-1}f(x)dx-\int_{e^{-2}-1}^0 f(x)dx \qquad \cdots ①$$

우선 $f(x)$의 부정적분을 구하면

$$\int f(x)dx=\int\left[\frac{1}{2}(\ln(x+1))^2+\ln(x+1)\right]dx=\frac{1}{2}\int(\ln(x+1))^2dx+\int\ln(x+1)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[(x+1)(\ln(x+1))^2-\int(x+1)2\ln(x+1)\frac{1}{x+1}dx\right]+\int\ln(x+1)dx=\frac{1}{2}(x+1)(\ln(x+1))^2$$

등식 ①의 오른쪽 첫 번째 적분을 구하면,

$$\int_{e^{-3}-1}^{e^{-2}-1}f(x)dx=\frac{1}{2}(x+1)\left[(\ln(x+1))^2\right]_{e^{-3}-1}^{e^{-2}-1}=\frac{1}{2}e^{-2}(-2)^2-\frac{1}{2}e^{-3}(-3)^2=2e^{-2}-\frac{9}{2}e^{-3}$$

등식 ①의 오른쪽 두 번째 적분을 구하면,

$$\int_{e^{-2}-1}^0 f(x)dx=\left[\frac{1}{2}(x+1)(\ln(x+1))^2\right]_{e^{-2}-1}^0=0-\frac{1}{2}e^{-2}\times(-2)^2=-2e^{-2}$$

그러므로 구하는 정적분은 $\int_{e^{-3}-1}^0|f(x)|dx=4e^{-2}-\frac{9}{2}e^{-3}$이다.

(3) $f'(x)=\dfrac{\ln(x+1)+1}{x+1}$ 이고, 양의 실수 x에 대하여 $f''(x)=\dfrac{-\ln(x+1)}{(x+1)^2}<0$이다.

그러므로 $f'(x)$는 감소함수이다. 평균값 정리에 의해 아래의 ①과 ②가 성립한다.

① $\dfrac{1}{x}$과 $\dfrac{2}{x}$ 사이에 c_1이 존재하여 $f'(c_1)=\dfrac{f\left(\frac{2}{x}\right)-f\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{2}{x}-\frac{1}{x}}=x\left[f\left(\frac{2}{x}\right)-f\left(\frac{1}{x}\right)\right]$ 을 만족한다.

② $\dfrac{2}{x}$과 $\dfrac{3}{x}$ 사이에 c_2이 존재하여 $f'(c_2)=\dfrac{f\left(\frac{3}{x}\right)-f\left(\frac{2}{x}\right)}{\frac{3}{x}-\frac{2}{x}}=x\left[f\left(\frac{3}{x}\right)-f\left(\frac{2}{x}\right)\right]$ 을 만족한다.

$x>0$에서 함수 $f'(x)$는 감소함수이고 $c_1<c_2$이므로, $f'(c_1)>f'(c_2)$이다.

따라서 $x\left[f\left(\frac{2}{x}\right)-f\left(\frac{1}{x}\right)\right]>x\left[f\left(\frac{3}{x}\right)-f\left(\frac{2}{x}\right)\right]$ 이고 $x>0$이므로,

$f\left(\frac{2}{x}\right)-f\left(\frac{1}{x}\right)>f\left(\frac{3}{x}\right)-f\left(\frac{2}{x}\right)$이다.

그러므로 양의 실수 x에 대하여 부등식 $2f\left(\frac{2}{x}\right)>f\left(\frac{1}{x}\right)+f\left(\frac{3}{x}\right)$이 성립한다.

13번 문항 해설

정답 : -68

$b_n = \frac{1}{6}(n^3 - 18n^2 + 35n + 54) = \frac{1}{6}(n+1)(n^2 - 19n + 54)$이다. 삼차함수 $\frac{1}{6}(n+1)(n^2 - 19n + 54)$의 그래프의 개형을 고려해 보자. 근이 $x = -1$, $\frac{19 - \sqrt{145}}{2} \approx 3.5$, $\frac{19 + \sqrt{145}}{2} \approx 15.5$이므로 $n = 4$, 5, $\cdots$, 15일 때 b_n이 음수가 나온다.

그래프의 개형을 고려해서 $n = 9$, 10, 11, 12인 경우만 조사해 보면 된다.

최솟값의 위치를 찾는 다른 방법으로 $f(x) = \frac{1}{6}(n+1)(n^2 - 19n + 54)$를 미분하면 $f'(x) = 0$의 근이 $6 - \frac{\sqrt{219}}{3}$, $6 + \frac{\sqrt{219}}{3}$이고 $10 < 6 + \frac{\sqrt{210}}{3} < 11$이므로 $n = 10$, 11만 체크해도 된다.

$b_{10} = -66$이고 $b_{11} = -68$이므로 최솟값은 -68이다.

14번 문항 해설

주어진 함수 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}+1}{x+2(\sqrt{x+1}+1)\cos(\sqrt{x+1}-1)}$ 에서

$t=\sqrt{x+1}-1$라 하면 $\sqrt{x+1}+1=t+2$, $x=t^2+2t$이므로

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+1}+1}{x+2(\sqrt{x+1}+1)\cos(\sqrt{x+1}-1)}=\frac{1}{t+2\cos t}$$

이다. 따라서 $g(t)=t+2\cos t$(단, $0\le t\le\pi$)가 최솟값을 갖는 t를 찾으면 된다.

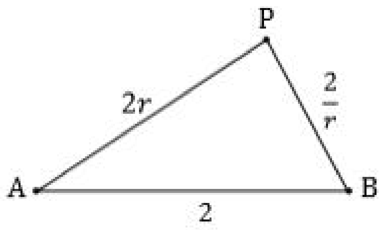
함수 $g(t)$의 도함수는 $g'(t)=1-\sin t$이므로 $g'(t)=0$이 되는 $t=\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{5\pi}{6}$을 찾을 수 있고,

이를 통해 함수 $g(t)$는 구간 $\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)$에서 증가, 구간 $\left(\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5\pi}{6}\right)$에서 감소, 구간 $\left(\dfrac{5\pi}{6},\ \pi\right)$에서 증가함을 알 수 있으며, $g(t)$의 최댓값은 $g(0)$ 또는 $g\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$임을 알 수 있다.

$g(0)=1$, $g\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=\dfrac{5\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $g\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)>g(0)$이다. 따라서 $g(t)$의 최솟값은 $t=\dfrac{5\pi}{6}$일 때 얻을 수 있고 $f(x)$의 최댓값은 $x=\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)^2+2\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$에서 갖는다.

15번 문항 해설

$\overline{\mathrm{AP}}=2\mathrm{r}$, $\overline{\mathrm{BP}}=\dfrac{2}{\mathrm{r}}$ 라 하자$(r>0)$.

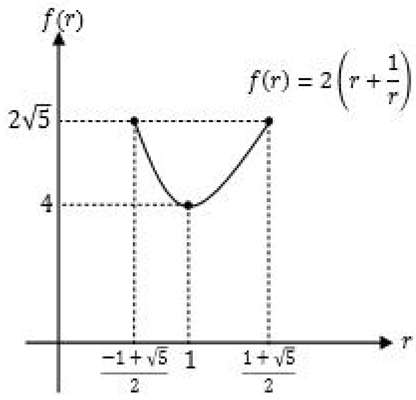


세 점 A, B, P는 삼각형의 세 꼭짓점이거나 일직선 위에 있으므로

$2r+\dfrac{2}{r}\geq 2$, $2r+2\geq \dfrac{2}{r}$, $2+\dfrac{2}{r}\geq 2r$이 성립한다. 이로부터 $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\leq r\leq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 이 성립한다.

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=2\left(\mathrm{r}+\dfrac{1}{\mathrm{r}}\right)=\mathrm{f}(\mathrm{r})$이라 하면, $f'(r)=2\left(1-\dfrac{1}{r^2}\right)$이므로 다음의 변화표와 $f(r)$의 그래프로부터 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최댓값은 $f\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)=f\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=2\sqrt{5}$이고, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 $f(1)=4$이다.

r	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
$f'(r)$		$-$	0	$+$	
$f(r)$	$2\sqrt{5}$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$2\sqrt{5}$



(참고 : $\overline{\mathrm{AP}}=\mathrm{r}$, $\overline{\mathrm{BP}}=\dfrac{4}{\mathrm{r}}$라 두면 $(r>0)$, $-1+\sqrt{5}\leq r\leq 1+\sqrt{5}$이 성립한다.

$\overline{AP}+\overline{BP}=r+\frac{4}{r}=g(r)$라 하면 역시 동일한 결과를 얻을 수 있다.)

16번 문항 해설

먼저 구간 $(0,\ \infty)$에서 함수 $y=x+\dfrac{1}{x}$의 증가와 감소의 표는 함수의 미분

$y'=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x^2}$을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y		$\searrow$	2	$\nearrow$

$h(x)=f(x)-g(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}-x-\dfrac{1}{x}-k$라고 두면 두 그래프 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 $h(x)=0$의 실근이다. $t=x+\dfrac{1}{x}$이라고 두면 $t\geq 2$이고 $t^2-t-2-k=0$이다. k가 양수일 때, $t^2-t-2-k=0$은 2보다 큰 실근 $\dfrac{1+\sqrt{4k+9}}{2}$을 한 개만 가진다. 이 실근을 $t_0=\dfrac{1+\sqrt{4k+9}}{2}$라고 두면 $t=x+\dfrac{1}{x}$이므로 $h(x)=0$의 실근 x는 $x+\dfrac{1}{x}=t_0$의 실근이다. $x+\dfrac{1}{x}=t_0$의 실근은 두 그래프 $y=x+\dfrac{1}{x}$와 $y=t_0$의 교점의 x좌표이다. 함수 $y=x+\dfrac{1}{x}$의 증가와 감소의 표를 이용하면, 이 함수의 그래프의 개형으로부터 $t_0>2$일 때 $y=x+\dfrac{1}{x}$과 $y=t_0$는 $x>0$에서 서로 다른 2개의 점에서 만난다. 따라서 $h(x)=0$은 서로 다른 두 개의 실근을 가지고, 두 함수의 그래프 $y=x+\dfrac{1}{x}$과 $y=t_0$는 서로 다른 2개의 점에서 만난다.

17번 문항 해설

문제의 조건에서 다음을 얻을 수 있다.

$$(x-\cos t)^2+(\sqrt{x}-\sin t)^2=1 \qquad (*)$$

음함수 미분하여 다음을 얻는다.

$$(x-\cos t)(x'+\sin t)+(\sqrt{x}-\sin t)\left(\frac{x'}{2\sqrt{x}}-\cos t\right)=0$$

1) $t=\frac{\pi}{2}$ 일 때, 대응하는 점은 $B(1,1)$ 이다. $t=\frac{\pi}{2}$, $x=1$ 대입하면 $\frac{dx}{dt}=-1$ 이다.

2) x 가 $t=\alpha$ 에서 최댓값을 가질 때 $x'(\alpha)=0$ 임을 고려하면, $\sqrt{x}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ 이다. 식 $(*)$을 정리하면 $x^2-2x\cos t+x-2\sqrt{x}\sin t=0$ 이다. $\sqrt{x}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ 를 대입하면

$$\cos\alpha-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=2\sin^4\alpha$$

이 된다. $\sin^2 t=1-\cos^2 t$ 을 이용하여 정리하면 $2\cos^2\alpha+\cos\alpha-2=0$ 이 되고 $\cos\alpha=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$ 이다. x 값을 구하면 $x=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{9-\sqrt{17}}{\sqrt{17}-1}=\frac{\sqrt{17}-1}{2}$ 이다.

구간 $0\le t\le\pi$ 의 양 끝점에서 함수 값을 확인하자. $t=0$ 일 때, 대응하는 B는 $(1,1)$ 이고, $t=\pi$ 일 때, 대응하는 B는 $(0,0)$ 이다. $1<\frac{\sqrt{17}-1}{2}$ 이므로 최댓값은 $x=\frac{\sqrt{17}-1}{2}$ 이다.

18번 문항 해설

임의의 양의 실수 x에 대하여 $p(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}$ 이라고 할 때, $p(x)>0$임을 보이자.

$$p'(x)=\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}+\frac{1}{(x+1)^2}=-\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)^2}=-\frac{1}{x(x+1)^2}<0$$

이므로 제시문 [나]에 의하여 $p(x)$는 구간 $(0,\infty)$에서 감소한다. 또한,

$$\lim_{x\to\infty}p(x)=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+1}=0-0=0$$

이다. 따라서 $p(x)>0$이다.

(ii) 임의의 양의 실수 x에 대하여 $q(x)=\frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$이라고 할 때, 위와 같은 방법으로 $q(x)>0$임을 보이자.

$$q'(x)=-\frac{2x+1}{2x(x+1)\sqrt{x(x+1)}}+\frac{1}{x(x+1)}=-\frac{(2x+1)-2\sqrt{x(x+1)}}{2x(x+1)\sqrt{x(x+1)}}<0$$

이다. 여기서, $(2x+1)^2-\left(2\sqrt{x(x+1)}\right)^2=1>0$이고 $2x+1>0$, $2\sqrt{x(x+1)}>0$이므로 분자가 양수임을 이용하였다. 그러므로 제시문 [나]에 의하여 $q(x)$는 구간 $(0,\infty)$에서 감소한다. 또한,

$$\lim_{x\to\infty}q(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}-\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=0-0=0$$

이다. 따라서 $q(x)>0$이다.