2025학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가 문제지 1

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[8]{4}}$ 의 값은? [2점]

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

- $\sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{2^5} = 2^{\frac{5}{4}}$
- $\sqrt[8]{4} = \sqrt[8]{2^2} = 2^{\frac{2}{8}} = 2^{\frac{1}{4}}$

$$\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[8]{4}} = \frac{2^{\frac{5}{4}}}{2^{\frac{1}{4}}} = 2^{\frac{5}{4}-\frac{1}{4}} = 2^1 = 2$$

2. 함수 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5$에 대하여 $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

- $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \underline{f'(1)}$

구해야 할 값!

$f'(x) = 3x^2 + 6x$ 이므로 $f'(1) = 9$

3. 모든 항이 실수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_2 a_3 = 2, \quad a_4 = 4$$

일 때, a_6의 값은? [3점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

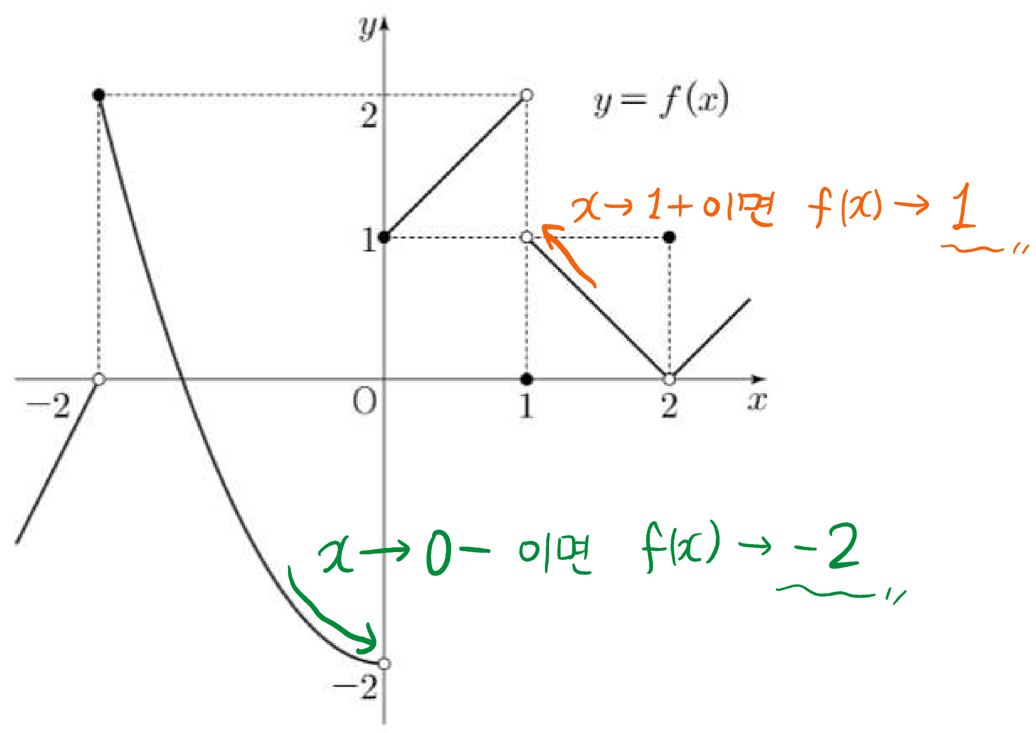
첫째항 : a, 공비 : r 이라 하자.

- $a_2 a_3 = (ar)(ar)^2 = a^2 r^3$ $\quad \therefore a^2 r^3 = 2 \cdots ㉠$
- $a_4 = ar^3$ $\quad \therefore ar^3 = 4 \cdots ㉡$

㉠과 ㉡을 연립하여 풀면 $a = \frac{1}{2}$, $r = 2$

$$\therefore a_6 = ar^5 = \frac{1}{2} \times 2^5 = 2^4 = 16$$

4. 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim\limits_{x \to 0-} f(x) + \lim\limits_{x \to 1+} f(x)$ 의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$(-2) + 1 = -1$

5. 함수 $f(x)=(x+1)(x^2+x-5)$에 대하여 $f'(2)$의 값은? [3점]

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

$f'(x) = (x+1)'(x^2+x-5) + (x+1)(x^2+x-5)'$

$= 1\cdot(x^2+x-5) + (x+1)(2x+1)$

$= (x^2+x-5) + (2x^2+3x+1)$

$= 3x^2+4x-4$

$\therefore f'(2) = 16$

6. $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여 $\cos(\pi+\theta)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$일 때, $\sin\theta+\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$이므로 $-\cos\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \cos\theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$이므로

$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = 1-\frac{4}{5} = \frac{1}{5} \rightarrow \sin\theta = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$

이때, θ는 제2사분면의 각이므로 $\sin\theta>0$이다.

$\therefore \sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \sin\theta + \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

7. 함수

$$f(x)=\begin{cases}(x-a)^2 & (x<4)\\ 2x-4 & (x\ge 4)\end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 곱은? [3점]

① 6 ② 9 ③ 12 ④ 15 ⑤ 18

$\lim_{x\to4-} f(x) = (4-a)^2$

$\lim_{x\to4+} f(x) = f(4) = 2\times4-4 = 4$

$f(x)$가 $x=4$에서 연속이 되어야 하므로

$\underbrace{\lim_{x\to4-} f(x)}_{(4-a)^2} = \underbrace{\lim_{x\to4+} f(x) = f(4)}_{4}$를 만족시켜야 한다.

$(4-a)^2 = 4$이므로 $4-a = \pm2$

$\therefore a=2$ 또는 $a=6$

$\hookrightarrow 2\times6 = 12$

8. $a>2$인 상수 a에 대하여 두 수 $\log_2 a$, $\log_a 8$의 합과 곱이 각각 4, k일 때, $a+k$의 값은? [3점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

• $\log_2 a + \log_a 8 = 4$

밑의 변환공식

$\log_2 a + \dfrac{\log_2 8}{\log_2 a} = 4$ (3)

양변에 $\log_2 a$ 곱하여 정리

$(\log_2 a)^2 - 4\log_2 a + 3 = 0$

$\log_2 a$에 대한 이차방정식 풀기

$\log_2 a = 1$ 또는 $\log_2 a = 3$

$a = 2^1 = 2$ ($a>2$ 조건 위배) $a = 2^3 = 8$

$\therefore a = 8$

• $k = \log_2 8 \times \log_8 8 = 3 \times 1 = 3$

$\therefore k = 3$

$\therefore a + k = 11$

9. 함수 $f(x) = x^2 + x$에 대하여

$$5\int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 (5x + f(x))\,dx$$

의 값은? [4점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

$5\int_0^1 f(x)\,dx - \left\{\int_0^1 5x\,dx + \int_0^1 f(x)\,dx\right\}$

$= 4\int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 5x\,dx$

$= 4\int_0^1 (x^2+x)\,dx - 5\int_0^1 x\,dx$

$= 4\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 - 5\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$

$= 4 \times \frac{5}{6} - 5 \times \frac{1}{2}$

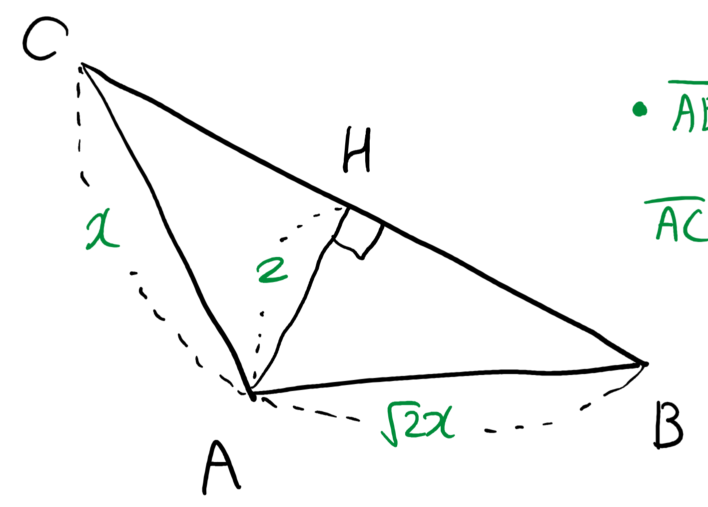
$= \frac{10}{3} - \frac{5}{2} = \frac{5}{6}$

10. $\angle A > \frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\overline{AB} : \overline{AC} = \sqrt{2} : 1$, $\overline{AH} = 2$

이고, 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 50π일 때, 선분 BH의 길이는? [4점]

① 6 ② $\frac{25}{4}$ ③ $\frac{13}{2}$ ④ $\frac{27}{4}$ ⑤ 7



• $\overline{AB} : \overline{AC} = \sqrt{2} : 1$이므로

$\overline{AC} = x$라 하면 $\overline{AB} = \sqrt{2}x$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하자.

$\pi R^2 = 50\pi$이므로 $R^2 = 50$ $\therefore R = 5\sqrt{2}$

사인법칙에 의해 $\dfrac{x}{2\sin(\angle B)} = 5\sqrt{2}$ 이므로

$\sin(\angle B) = \dfrac{x}{10\sqrt{2}}$

$\sin(\angle B) = \dfrac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}x} = \dfrac{\sqrt{2}}{x}$ 이고

이 값이 $\dfrac{x}{10\sqrt{2}}$ 와 같으므로 $\dfrac{\sqrt{2}}{x} = \dfrac{x}{10\sqrt{2}}$

↳ $x^2 = 20$ $\therefore x = 2\sqrt{5}$

따라서 $\overline{AB} = \sqrt{2}x = 2\sqrt{10}$ 이므로

$\overline{BH}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AH}^2 = 40 - 4 = 36$

$\therefore \overline{BH} = 6$

11. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t ($t \geq 0$)에서의 위치가 각각

$$x_1 = t^2 + t - 6, \quad x_2 = -t^3 + 7t^2$$

이다. 두 점 P, Q의 위치가 같아지는 순간 두 점 P, Q의 가속도를 각각 p, q라 할 때, $p-q$의 값은? [4점]

① 24 ② 27 ③ 30 ④ 33 ⑤ 36

$x_1 = x_2$ 가 같아지는 순간

$t^2 + t - 6 = -t^3 + 7t^2$

좌변으로 이항

$t^3 - 6t^2 + t - 6 = 0$

t-6으로 각각 묶기

$t^2(t-6) + (t-6) = 0$

t-6 공통인수

$(t^2+1)(t-6) = 0$

$\therefore t = 6$ → 위치 같아지는 시간

$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = 2t+1$ 이고 $a_1 = \frac{dv_1}{dt} = 2$ 이므로

$t=6$일 때 $p = 2$

$v_2 = \frac{dx_2}{dt} = -3t^2 + 14t$ 이고 $a_2 = \frac{dv_2}{dt} = -6t + 14$ 이므로

$t=6$일 때 $q = -6 \cdot 6 + 14 = -22$

$\therefore p - q = 2 - (-22) = 24$

12. 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이고, 수열 $\{b_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$$

를 만족시킨다. $b_2 = -2$, $b_3 + b_7 = 0$일 때, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제9항까지의 합은? [4점]

① -22 ② -20 ③ -18 ④ -16 ⑤ -14

• $b_2 = a_1 - a_2$ $\quad \therefore a_1 - a_2 = -2$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 공차 d는 2이다.

• $b_3 = \underbrace{a_1 - a_2}_{-2} + a_3 = -2 + a_3$

$= -2 + \underbrace{(a_1 + 4)}_{a_3 = a_1 + 2d} = a_1 + 2$

• $b_7 = \underbrace{a_1 - a_2}_{-2} + \underbrace{a_3 - a_4}_{-2} + \underbrace{a_5 - a_6}_{-2} + a_7$

$= -6 + a_7 = -6 + \underbrace{(a_1 + 12)}_{a_7 = a_1 + 6d}$

$= a_1 + 6$

따라서 $b_3 + b_7 = (a_1+2) + (a_1+6) = 2a_1 + 8$ 이고

이 값이 0이므로 $a_1 = -4$

$a_1 = -4$, $d = 2$이므로 $a_n = 2n - 6$ 이다.

$b_1 = a_1$
$b_2 = -d$
$b_3 = -d + a_3$
$b_4 = -2d$
$b_5 = -2d + a_5$
$\vdots$
$b_8 = -4d$
$b_9 = -4d + a_9$

$b_1 + \cdots + b_9$

$= -20d + (a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9)$

$= -20d + (5a_1 + 20d)$

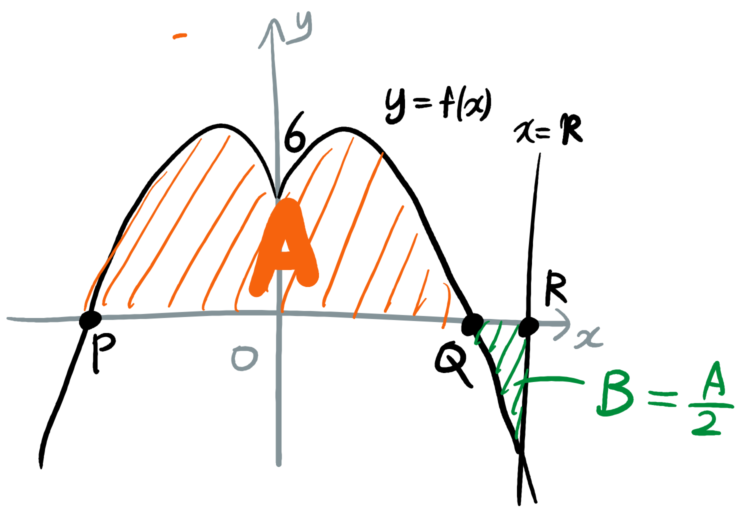
$= 5a_1 = 5 \times (-4) = -20$

13. 함수

$$f(x)=\begin{cases}-x^2-2x+6 & (x<0)\\ -x^2+2x+6 & (x\geq 0)\end{cases}$$

의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 두 점을 P, Q라 하고, 상수 $k(k>4)$에 대하여 직선 $x=k$가 x축과 만나는 점을 R이라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $x=k$ 및 선분 QR로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $A=2B$일 때, k의 값은? (단, 점 P의 x좌표는 음수이다.) [4점]

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$



점 Q의 x좌표를 a $(a>0)$라 하자.

함수 $f(x)$는 우함수이므로 $y=f(x)$의 그래프는 y축 대칭이다.

따라서 점 Q의 x좌표가 a라면 점 P의 x좌표는 $-a$이다.

그리고 $\int_0^a f(x)\,dx = \int_{-a}^0 f(x)\,dx$ 인데 $\int_{-a}^a f(x)dx = A$이므로

$\int_0^a f(x)\,dx = \int_{-a}^0 f(x)\,dx = \frac{A}{2}$가 된다.

한편, 위 그림에서 $\int_a^k f(x)dx = -B$ 인데 $A=2B \rightarrow B=\frac{A}{2}$이므로

$\int_a^k f(x)\,dx = -\frac{A}{2}$이다.

따라서 $\int_0^k f(x)dx = \int_a^k f(x)dx + \int_{-a}^a f(x)dx = \left(-\frac{A}{2}\right)+\frac{A}{2} = 0$이다.

$\int_0^k f(x)\,dx = \int_0^k (-x^2+2x+6)\,dx$

$= \left[-\frac{x^3}{3}+x^2+6x\right]_0^k = -\frac{k^3}{3}+k^2+6k$ 인데,

이 값이 0이므로 방정식 $-\frac{k^3}{3}+k^2+6k=0$을 풀면 $k=6$이다.

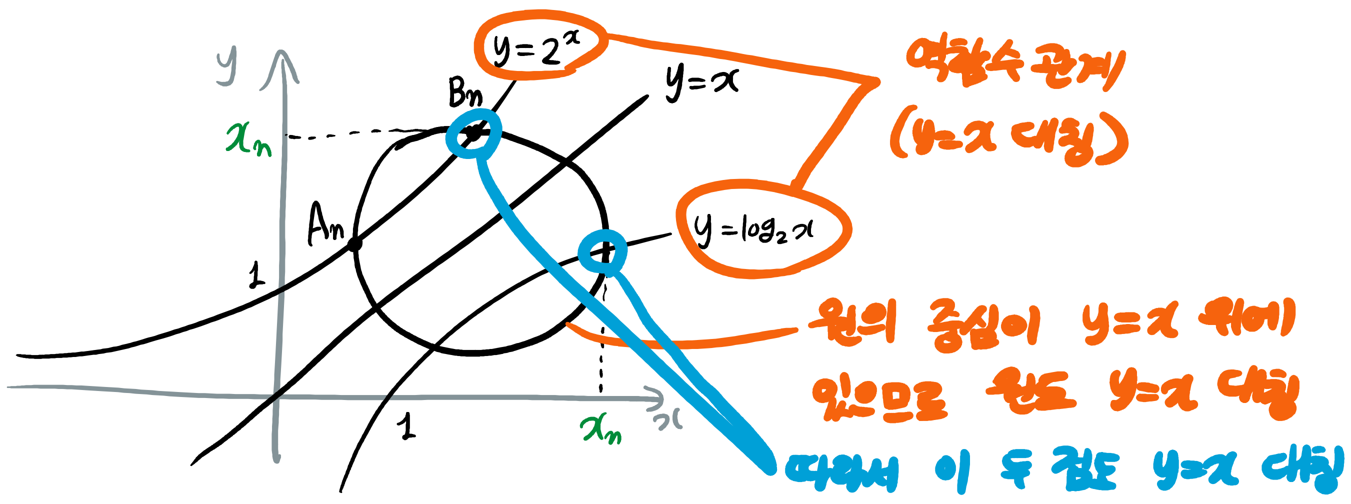
$(\because k>4)$

14. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=2^x$ 위의 두 점 A_n, B_n이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 직선 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 기울기는 3이다.
>
> (나) $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=n\times\sqrt{10}$

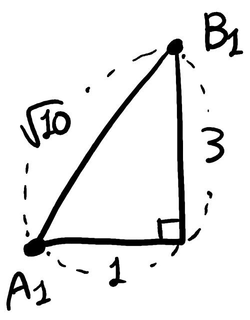
중심이 직선 $y=x$ 위에 있고 두 점 A_n, B_n을 지나는 원이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 두 점의 x좌표 중 큰 값을 x_n이라 하자. $x_1+x_2+x_3$의 값은? [4점]

① $\frac{150}{7}$ ② $\frac{155}{7}$ ③ $\frac{160}{7}$ ④ $\frac{165}{7}$ ⑤ $\frac{170}{7}$



∴ x_n은 점 B의 y좌표

(i) x_1 구하기



(나)조건에 의해 $\overline{A_1B_1}=\sqrt{10}$이고, 직선 A_1B_1의 기울기가 3이므로 이를 그림으로 나타내면 왼쪽 그림과 같다.

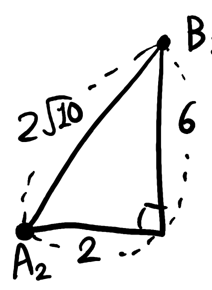
점 A_1의 좌표가 $(a_1, 2^{a_1})$이라면 점 B_1의 좌표는 $(a_1+1, 2^{a_1+1})$이고,

두 점 A_1과 B_1의 y좌표 차는 3이므로

$\underbrace{2^{a_1+1}}_{2\times 2^{a_1}} - 2^{a_1} = 2^{a_1} = 3$이다. 따라서 점 B_1의 y좌표는 6이므로

$x_1 = 6$이다.

(ii) x_2 구하기



(나)조건에 의해 $\overline{A_2B_2}=2\sqrt{10}$이다.

(i)과 같은 방법으로 점 A_2의 좌표를 $(a_2, 2^{a_2})$로 두면

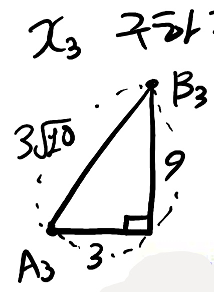
점 B_2의 좌표는 $(a_2+2, 2^{a_2+2})$이다.

두 점 A_2와 B_2의 y좌표 차는 6이므로

$2^{a_2+2} - 2^{a_2} = 3\cdot 2^{a_2} = 6 \rightarrow 2^{a_2}=2$이다.

따라서 점 B_2의 y좌표는 8이므로 $x_2 = 8$이다.

(iii) x_3 구하기



같은 방법으로 $7\cdot 2^{a_3} = 9$이므로 $2^{a_3}=\frac{9}{7}$이고,

점 B의 y좌표는 $8\cdot 2^{a_3} = \frac{72}{7}$이다.

$\therefore x_3 = \frac{72}{7}$

$\therefore x_1+x_2+x_3 = 6+8+\frac{72}{7} = \frac{170}{7}$

15. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$는 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_{1}^{x} tf(t)dt + \int_{-1}^{x} tg(t)dt = 3x^4 + 8x^3 - 3x^2$

(나) $f(x) = xg'(x)$

$\int_{0}^{3} g(x)dx$ 의 값은? [4점]

① 72 ② 76 ③ 80 ④ 84 ⑤ 88

(가)의 양변을 x에 대해 미분하면

$xf(x) + xg(x) = 12x^3 + 24x^2 - 6x$

양변을 x $(x \neq 0)$으로 나누면

$f(x) + g(x) = 12x^2 + 24x - 6$

이때, $f(x) = xg'(x)$ 이므로

$xg'(x) + g(x) = 12x^2 + 24x - 6$ 이다.

우변이 이차식이므로 $g(x)$가 이차식이 되어야 등식이 성립할 수 있다.

$g(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c는 상수) 로 두면

$x(2ax+b) + (ax^2+bx+c) = 12x^2 + 24x - 6$

$3ax^2 + 2bx + c = 12x^2 + 24x - 6$

$a=4$, $b=12$, $c=-6$ $\therefore g(x) = 4x^2 + 12x - 6$

따라서

$\int_0^3 g(x)\,dx = \int_0^3 (4x^2 + 12x - 6)\,dx$

$= \left[\frac{4}{3}x^3 + 6x^2 - 6x\right]_0^3 = 72$

단답형

16. 방정식

$$\log_3(x+2) - \log_{\frac{1}{3}}(x-4) = 3$$

을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점] 7

$\log_3(x+2) - \log_{\frac{1}{3}}(x-4)$

$= \log_3(x+2) + \log_3(x-4)$

$= \log_3(x+2)(x-4)$

$= \log_3(x^2-2x-8)$

$\log_3(x^2-2x-8) = 3$이므로 $x^2-2x-8 = 27 (=3^3)$이다.

이차방정식 $x^2-2x-35=0$을 풀면 $x=-5$ 또는 $x=7$ 이지만

진수 조건에 의해 $x>4$이므로 $x=7$이다.

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 6x^2 + 2x + 1$이고 $f(0) = 1$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점] 5

$f(x) = \int f'(x)dx = \int (6x^2+2x+1)\,dx$

$= 2x^3 + x^2 + x + C$

이때, $f(0)=1$이므로 $C=1$이다.

따라서 $f(x) = 2x^3 + x^2 + x + 1$이므로 $f(1) = 5$

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} ka_k = 36, \quad \sum_{k=1}^{9} ka_{k+1} = 7$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값을 구하시오. [3점] 29

$$\sum_{k=1}^{10} ka_k = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 10a_{10} = 36$$

$$-\ \underline{\sum_{k=1}^{9} ka_{k+1} = \quad a_2 + 2a_3 + \cdots + 9a_{10} = 7}$$

$$\underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}}_{\sum_{k=1}^{10} a_k} = 29$$

19. 함수 $f(x) = x^3 + ax^2 - 9x + b$는 $x=1$에서 극소이다. 함수 $f(x)$의 극댓값이 28일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 상수이다.) [3점] 4

$f'(x) = 3x^2 + 2ax - 9$ 이고

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이므로 $f'(1) = 0$이다.

$\therefore a = 3$

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x+3)(x-1)$ 이므로

$f(x)$의 증감표를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 극댓값은 $f(-3) = 9\underset{3}{a} + b = 27 + b$ 인데,

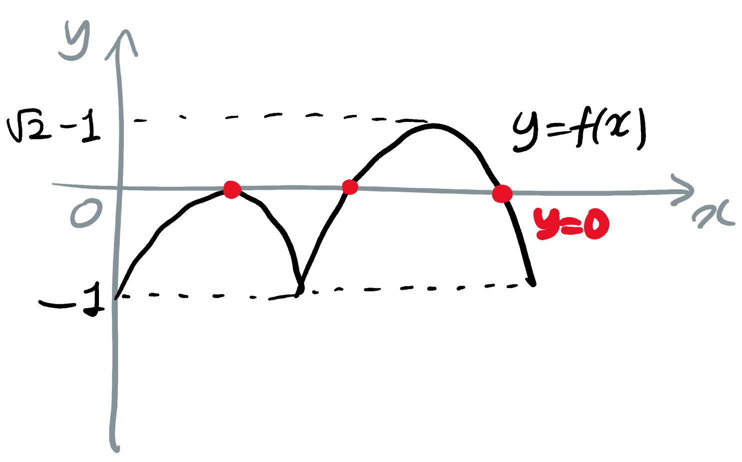
이 값이 28이므로 $b = 1$이다.

$\therefore a + b = 3 + 1 = 4$

20. 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 함수

$$f(x) = \begin{cases} \sin x - 1 & (0 \le x < \pi) \\ -\sqrt{2}\sin x - 1 & (\pi \le x \le 2\pi) \end{cases}$$

가 있다. $0 \le t \le 2\pi$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x) = f(t)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 모든 t의 값의 합은 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] 15



위 그림에서 방정식 $f(x) = f(t)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 $f(t)$의 값은 0 또는 -1이다.

(i) $f(t) = 0$이 되는 t 구하기

$0 \le t < \pi$일 때, $\sin t - 1 = 0$이므로 $\underline{t = \frac{\pi}{2}}$

$\pi \le t \le 2\pi$일 때, $-\sqrt{2}\sin t - 1 = 0$ 이므로

$\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \underline{t = \frac{5}{4}\pi}$ 또는 $\underline{t = \frac{7}{4}\pi}$

(ii) $f(t) = -1$이 되는 t 구하기

$0 \le t < \pi$일 때, $\sin t - 1 = -1$이므로 $\underline{t = 0}$

$\pi \le t \le 2\pi$일 때, $-\sqrt{2}\sin t - 1 = -1$이므로

$\sin t = 0 \rightarrow \underline{t = \pi}$ 또는 $\underline{t = 2\pi}$

구해놓은 t를 모두 다 더하면

$$\frac{\pi}{2} + \frac{5}{4}\pi + \frac{7}{4}\pi + 0 + \pi + 2\pi = \frac{13}{2}\pi$$

$\therefore p + q = 2 + 13 = 15$

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 정수 k에 대하여

$$2k-8 \le \frac{f(k+2)-f(k)}{2} \le 4k^2+14k$$

를 만족시킬 때, $f'(3)$의 값을 구하시오. [4점] 31

혹시 $2k-8 = 4k^2+14k$가 되는 경우가 있는지 확인해보면

이 이차방정식을 풀었을 때 $k=-2$와 $k=-1$이 실근으로 나온다.

따라서 $k=-2$일 때

$$\underbrace{-12 \le \frac{f(0)-f(-2)}{2} \le}_{-12} -12\text{이므로}$$

$f(0)-f(-2) = -24$ 이다.

그리고 $k=-1$일 때

$$\underbrace{-10 \le \frac{f(1)-f(-1)}{2} \le}_{-10} -10\text{ 이므로}$$

$f(1)-f(-1) = -20$이다.

$f(x) = x^3+ax^2+bx+c$라 하자.

$f(0)-f(-2)=-24$이므로 $-4a+2b+8=-24$

$\therefore 2a-b=16 \cdots$ ㉠

$f(1)-f(-1)=-20$이므로 $2+2b=-20$

$\therefore b=-11 \cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $a=\frac{5}{2}$이다.

따라서 $f(x)=x^3+\frac{5}{2}x^2-11x+c$이므로

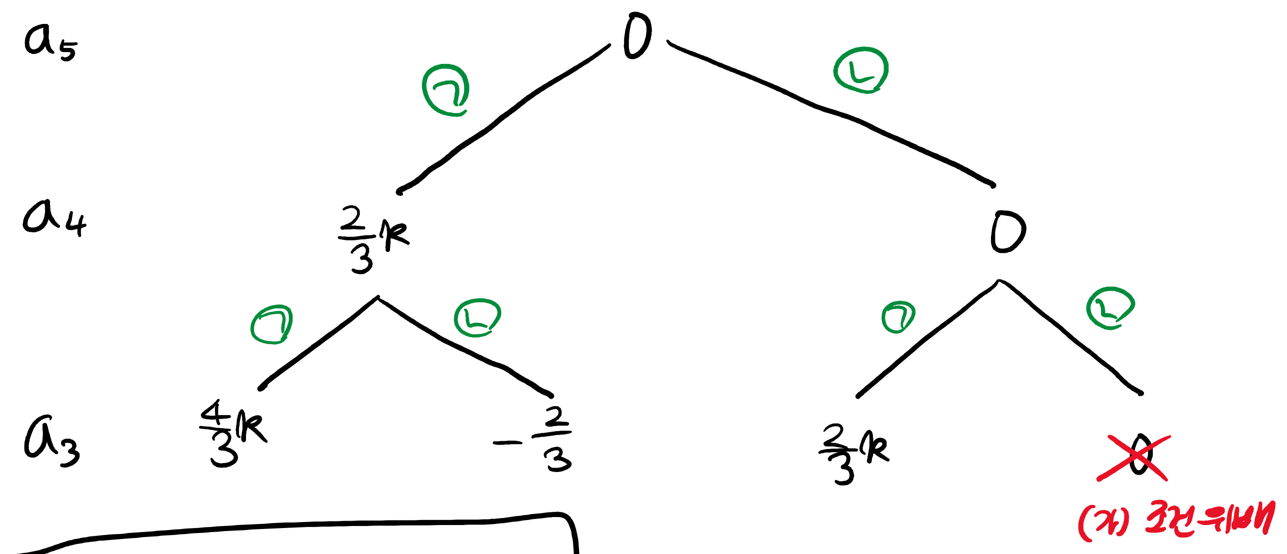
$f'(x)=3x^2+5x-11$ $\quad \therefore f'(3)=31$

22. 양수 k에 대하여 $a_1=k$인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

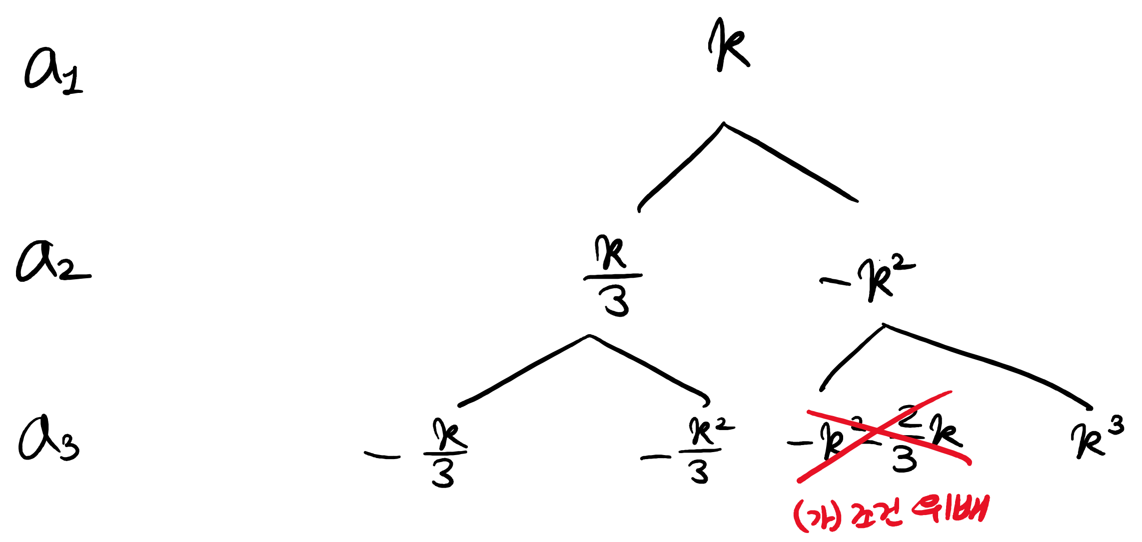
> (가) $a_2 \times a_3 < 0$
>
> (나) 모든 자연수 n에 대하여
> $\left(a_{n+1}-a_n+\frac{2}{3}k\right)\left(a_{n+1}+ka_n\right)=0$이다.

$a_5=0$이 되도록 하는 서로 다른 모든 양수 k에 대하여 k^2의 값의 합을 구하시오. [4점] 8

역방향 ($a_5 \to a_4 \to a_3$)



정방향 ($a_1 \to a_2 \to a_3$)



역방향에서 $a_3 = \frac{4}{3}k$ 또는 $-\frac{2}{3}$ 또는 $\frac{2}{3}k$ 이고

정방향에서 $a_3 = \underbrace{-\frac{k}{3}}_{(1)\ -\frac{2}{3}}$ 또는 $\underbrace{-\frac{k^2}{3}}_{(2)\ -\frac{2}{3}}$ 또는 $\underbrace{k^3}_{(3)\ \frac{4}{3}k\ 또는\ (4)\ \frac{2}{3}k}$ 이다.

(1) $k=2$이므로 $k^2=4$ (2) $k^2=2$ (3) $k^2=\frac{4}{3}$ (4) $k^2=\frac{2}{3}$

$\therefore 4+2+\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=8$

> * 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 다섯 개의 숫자 1, 2, 2, 3, 3을 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

$$\frac{5!}{2!2!} = \frac{5\times\cancel{4}\times3\times2\times1}{\cancel{2}\times\cancel{2}} = 30$$

24. 두 사건 A, B는 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3},\quad \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cup B)$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{19}{24}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{7}{8}$ ⑤ $\frac{11}{12}$

$P(A\cap B) = P(A)\,P(B)$ 이므로

$$P(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \underbrace{\frac{1}{\cancel{6}\,2}}_{P(A\cap B)} \times \underbrace{\frac{\cancel{3}}{2}}_{\frac{1}{P(A)}} = \frac{1}{4}$$

따라서

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{3}{4}$$

25. 1부터 11까지의 자연수 중에서 임의로 서로 다른 2개의 수를 선택한다. 선택한 2개의 수 중 적어도 하나가 7 이상의 홀수일 확률은? [3점]

① $\frac{23}{55}$ ② $\frac{24}{55}$ ③ $\frac{5}{11}$ ④ $\frac{26}{55}$ ⑤ $\frac{27}{55}$

7 이상의 홀수 : 7, 9, 11 (3개)

여사건을 이용해서 문제를 풀면

(두 수 중 적어도 하나는 7, 9, 11 중에 있을 확률)

= 1 − (두 수가 모두 7, 9, 11이 아닐 확률)

$= 1 - \frac{{}_{8}C_{2}}{{}_{11}C_{2}} = 1 - \frac{28}{55} = \frac{27}{55}$

26. 정규분포 $\mathrm{N}(m, 6^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 9인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$, 정규분포 $\mathrm{N}(6, 2^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{Y}$라 하자. $\mathrm{P}(\overline{X} \le 12) + \mathrm{P}(\overline{Y} \ge 8) = 1$이 되도록 하는 m의 값은? [3점]

① 5 ② $\frac{13}{2}$ ③ 8 ④ $\frac{19}{2}$ ⑤ 11

$\overline{X}$의 분산은 $\frac{\text{모집단의 분산}}{\text{표본 크기}} = \frac{6^2}{9} = \frac{6^2}{3^2} = 2^2$

따라서 $\overline{X} \sim N(m, 2^2)$ 이다.

마찬가지로 $\overline{Y}$의 분산은 $\frac{2^2}{4} = \frac{2^2}{2^2} = 1^2$이므로

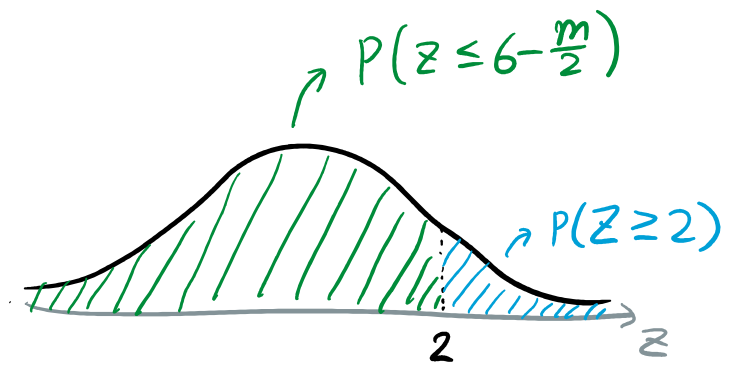
$\overline{Y} \sim N(6, 1^2)$ 이다.

$P(\overline{X} \le 12) = P\left(\frac{\overline{X}-m}{2} \le \frac{12-m}{2}\right) = P\left(Z \le 6 - \frac{m}{2}\right)$

$P(\overline{Y} \ge 8) = P\left(\frac{\overline{Y}-6}{1} \ge \frac{8-6}{1}\right) = P(Z \ge 2)$

이므로 $P\left(Z \le 6 - \frac{m}{2}\right) + P(Z \ge 2) = 1$ 이다.

따라서 $6 - \frac{m}{2} = 2$이므로 $m = 8$이다.



그래프 아래 총 면적이 1이므로

$P\left(Z \le 6 - \frac{m}{2}\right) + P(Z \ge 2) = 1$ 이려면

$6 - \frac{m}{2} = 2$가 되어야 한다.

27. 이산확률변수 X가 가지는 값이 0부터 4까지의 정수이고

$$\mathrm{P}(X=k)=\mathrm{P}(X=k+2)\quad(k=0,\ 1,\ 2)$$

이다. $\mathrm{E}(X^2)=\frac{35}{6}$일 때, $\mathrm{P}(X=0)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{24}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{8}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{5}{24}$

주어진 조건에 따르면

$P(X=0)=P(X=2)=P(X=4)$

$P(X=1)=P(X=3)$

이다.

x	0	1	2	3	4
$P(X=x)$	a	b	a	b	a

위 표에서 확률의 합은 1이므로

$3a+2b=1$ ⋯ ㉠

그리고

$E(X^2)=(0^2+2^2+4^2)\times a+(1^2+3^2)\times b$

$=20a+10b$

문제에서 이 값이 $\frac{35}{6}$로 주어져 있다.

$\times\frac{6}{5}$

$20a+10b=\frac{35}{6}$

$24a+12b=7$ ⋯ ㉡

㉠과 ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{6},\quad b=\frac{1}{4}$

따라서 $P(X=0)=a=\frac{1}{6}$이다.

28. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 $f: X\to X$인 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택하는 시행을 한다. 이 시행에서 선택한 함수 f가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$가 짝수일 확률은? [4점]

> $a\in X$, $b\in X$에 대하여
> a가 b의 약수이면 $f(a)$는 $f(b)$의 약수이다.

① $\frac{9}{19}$ ② $\frac{8}{15}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{27}{40}$ ⑤ $\frac{19}{25}$

박스 조건을 풀어쓰면 다음과 같다.

- $f(1)$은 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 약수이다.
- $f(2)$는 $f(4)$의 약수이다.

$f(4)$를 기준으로 케이스 분류를 시행하자.

(i) $f(4)=1$일 때

1의 약수는 1뿐이므로 $f(1)=f(2)=1$이다.
그리고 $f(3)$은 1부터 4까지 모두 가능하다.
따라서 $f(4)=1$인 경우의 수는 4

(ii) $f(4)=2$일 때

$f(1)=1$이면 $f(2)=1$ 또는 2이고, $f(3)$은 1부터 4까지 모두 가능.
→ $2\times4=8$가지

$f(1)=2$이면 $f(2)=2$이고 $f(3)=2$ 또는 4
→ $1\times2=2$가지

따라서 $f(1)=2$인 경우의 수는 $8+2=10$

(iii) $f(4)=3$일 때

$f(1)=1$이면 $f(2)=1$ 또는 3이고, $f(3)$은 1부터 4까지 모두 가능
→ $2\times4=8$가지

$f(1)=3$이면 $f(2)=f(3)=3$이다. → 1가지

따라서 $f(1)=3$인 경우의 수는 $8+1=9$

(iv) $f(4)=4$일 때

$f(1)=1$이면 $f(2)=1$ 또는 2 또는 4, $f(3)=1$부터 4까지 모두 가능
→ $3\times4=12$가지

$f(1)=2$이면 $f(2)=2$ 또는 4이고, $f(3)=2$ 또는 4
→ $2\times2=4$가지

$f(1)=4$이면 $f(2)=f(3)=4$ → 1가지

따라서 $f(4)=4$인 경우의 수는 $12+4+1=17$

결론적으로 구하는 확률은 $\frac{10+17}{4+10+9+17}=\frac{27}{40}$

단답형

29. 수직선의 원점에 점 A가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가
> 4 이하이면 점 A를 양의 방향으로 1만큼 이동시키고,
> 5 이상이면 점 A를 음의 방향으로 1만큼 이동시킨다.

이 시행을 16200번 반복하여 이동된 점 A의 위치가 5700 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 값을 k라 하자. $1000 \times k$의 값을 구하시오. [4점] 994

z	$P(0 \le Z \le z)$
1.0	0.341
1.5	0.433
2.0	0.477
2.5	0.494

주사위 눈이 4 이하로 나온 횟수를 확률 변수 X라 하면 5 이상으로 나온 횟수는 $16200-X$이다.

이때 점 A의 위치는

$1 \times X + (-1) \times (16200 - X) = 2X - 16200$ 이다.

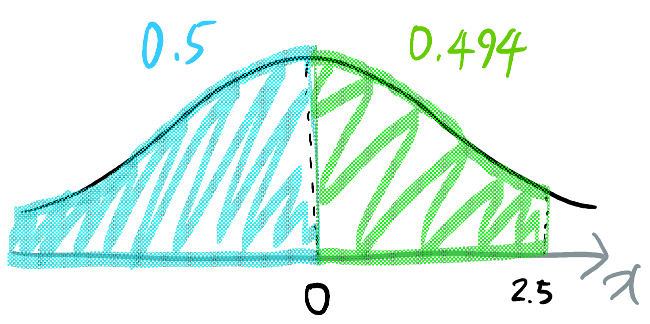
확률변수 X는 이항분포 $B(16200, \frac{2}{3})$를 따르는데,

이는 근사적으로 정규분포 $N(\underbrace{10800}_{16200 \times \frac{2}{3}}, \underbrace{60^2}_{16200 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}})$을 따른다.

이 점을 이용하여 $P(2X - 16200 \le 5700)$을 구하면

$$\begin{aligned} P(2X-16200 \le 5700) &= P(X \le 10950) \\ &= P\left(Z \le \frac{10950-10800}{60}\right) \\ &= P(Z \le 2.5) \\ &= 0.5 + P(0 \le Z \le 2.5) \\ &= 0.5 + 0.494 \\ &= 0.994 \end{aligned}$$

따라서 $k = 0.994$이므로 $1000k = 994$



30. 흰 공 4개와 검은 공 4개를 세 명의 학생 A, B, C에게 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않고, 공을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점] 93

> (가) 학생 A가 받는 공의 개수는 0 이상 2 이하이다.
> (나) 학생 B가 받는 공의 개수는 2 이상이다.

(가)를 기준으로 케이스를 분류하자.

(i) 학생 A가 받는 공의 개수가 0

학생 B, C에게 흰 공 4개, 검은 공 4개를 나누어주면 된다.

학생 B, C에게 흰 공 4개를 나누어주는 방법의 수는 5이고

(0+4, 1+3, 2+2, 3+1, 4+0)

학생 B, C에게 검은 공 4개를 나누어주는 방법의 수도 5이다.

따라서 전체 경우의 수는 $5 \times 5 = 25$ 이지만, 이 중에서 B가 공을 1개 이하로 받는 경우 3가지는 제외해야 한다. 학생 A가 공을 받지 못하는 경우의 수는 $25 - 3 = 22$

① B가 공을 못 받음 ② B가 흰 공 하나만 받음 ③ B가 검은공 하나만 받음

(ii) 학생 A가 받은 공의 개수가 1

① 학생 A가 흰공을 받았다면 흰 공 3개, 검은 공 4개를 B, C에게 나누어주고

② 검은 공을 받았다면 흰공 4개, 검은공 3개를 B, C에게 나누어주면 된다.

①의 경우의 수는 $4 \times 5 - 3 = 17$

②의 경우의 수는 $5 \times 4 - 3 = 17$] 34

(iii) 학생 A가 흰 공만 2개 또는 검은 공만 2개 받음

① 흰 공만 2개 받은 경우 → 흰공 2개, 검은공 4개를 B, C에게 분배

→ $3 \times 5 - 3 = 12$가지

② 검은 공만 2개 받은 경우 → 흰공 4개, 검은 공 2개를 B, C에게 분배

→ $5 \times 3 - 3 = 12$가지

∴ $12 + 12 = 24$

(iv) 학생 A가 흰 공과 검은 공을 하나씩 받음

흰 공과 검은 공이 각각 3개씩 남는데 이를 B, C에게 나눠주는 경우의 수는

$4 \times 4 - 3 = 13$

(i) ~ (iv)에서 구한 경우의 수를 모두 합산하면

$22 + 34 + 24 + 13 = 93$

> * 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

2025학년도 대수능 9월 모평 수학 풀이 (미적분)

2024년 9월 6일 금요일 오후 11:40

2025학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가 문제지 1

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{x}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{5x} \times 5$$

$$= 1 \times 5$$

$$= 5$$

24. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 있다. 양수 t에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{t} + 4e^{2t}$이다. $f(1) = 2e^2 + 1$일 때, $f(e)$의 값은? [3점]

① $2e^{2e} - 1$ ② $2e^{2e}$ ③ $2e^{2e} + 1$

④ $2e^{2e} + 2$ ⑤ $2e^{2e} + 3$

$f'(t) = \frac{1}{t} + 4e^{2t}$ 이므로

$$f(t) = \int \left(\frac{1}{t} + 4e^{2t}\right) dt$$

$$= \ln|t| + 2e^{2t} + C$$

$f(1) = 2e^2 + 1$이므로 $C = 1$

따라서 $f(t) = \ln|t| + 2e^{2t} + 1$이다.

$$\therefore f(e) = 2e^{2e} + 2$$

25. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n\times a_n-1}{3\times 2^{n+1}}=1$$

일 때, a_1+a_2의 값은? [3점]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ $\frac{11}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n\times a_n-1}{3\times 2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n\times a_n-1}{6\times 2^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n\times a_n}{6}-\underbrace{\frac{1}{6\times 2^n}}_{\to 0}\right)$$

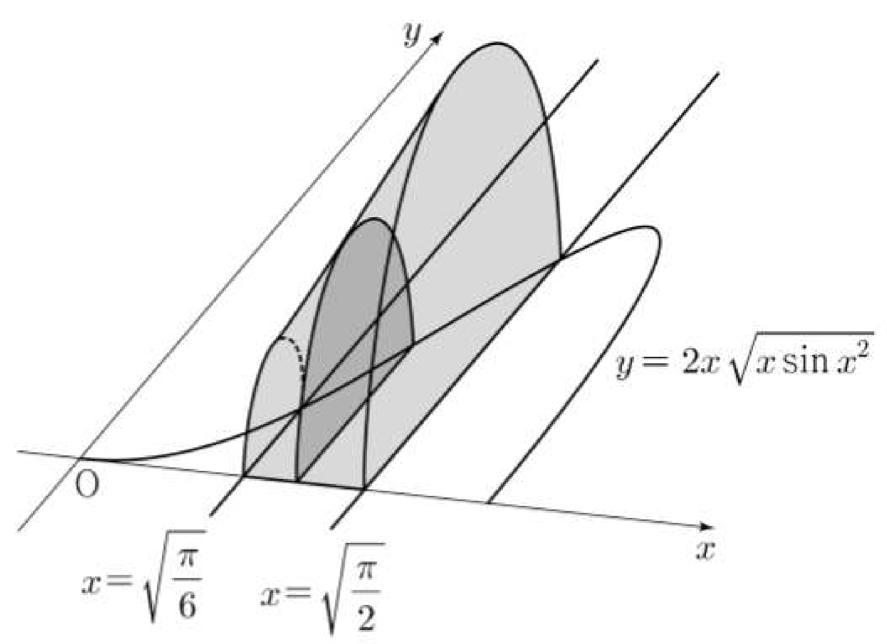
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\times a_n}{6}$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\times a_n}{6}=1$이고 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이므로

$a_n=\frac{6}{2^n}$이다.

따라서 $a_1+a_2=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$

26. 그림과 같이 곡선 $y=2x\sqrt{x\sin x^2}$ $(0\le x\le\sqrt{\pi})$와 x축 및 두 직선 $x=\sqrt{\frac{\pi}{6}}$, $x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 반원일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]

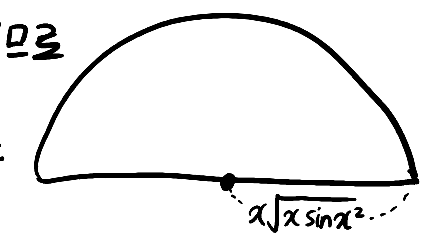


① $\frac{\pi^2+6\pi}{48}$ ② $\frac{\sqrt{2}\pi^2+6\pi}{48}$ ③ $\frac{\sqrt{3}\pi^2+6\pi}{48}$

④ $\frac{\sqrt{2}\pi^2+12\pi}{48}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}\pi^2+12\pi}{48}$

단면 반원의 반지름은 $x\sqrt{x\sin x^2}$이므로

넓이는 $\frac{1}{2}\pi\left(x\sqrt{x\sin x^2}\right)^2=\frac{1}{2}\pi x^3\sin x^2$ 이다.



따라서 입체 도형의 부피는

$$\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\frac{1}{2}\pi x^3\sin x^2\,dx=\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\frac{1}{2}\pi x^2\sin x^2\cdot x\,dx$$

$t=x^2$
$dt=2x\,dx$
치환

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\pi t\sin t\cdot\frac{1}{2}dt$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}t\sin t\,dt$$

$$=\frac{\pi}{4}\left\{\Big[-t\cos t\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(-\cos t)\,dt\right\}$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{12}+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{12}+\Big[\sin t\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{12}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}\pi^2+6\pi}{48}$$

27. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)+f\left(\frac{1}{2}\sin x\right)=\sin x$$

를 만족시킬 때, $f'(\pi)$의 값은? [3점]

① $-\frac{5}{6}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{6}$

주어진 등식의 양변을 미분하면

$$f'(x)+f'\left(\frac{1}{2}\sin x\right)\cdot\frac{1}{2}\cos x=\cos x$$

양변에 $x=\pi$를 대입하면

$$f'(\pi)-\frac{1}{2}f'(0)=-1 \quad \cdots ㉠$$

양변에 $x=0$을 대입하면

$$f'(0)+\frac{1}{2}f'(0)=1 \rightarrow \frac{3}{2}f'(0)=1$$

$$\rightarrow f'(0)=\frac{2}{3}$$

이 결과를 ㉠에 대입하면

$$f'(\pi)-\frac{1}{3}=-1 \qquad \therefore f'(\pi)=-\frac{2}{3}$$

28. 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속인 이계도함수를 갖고, 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f'(2x)\sin\pi x+x$$

라 하자. 함수 $g(x)$는 역함수 $g^{-1}(x)$를 갖고,

$$\int_0^1 g^{-1}(x)\,dx=2\int_0^1 \underbrace{f'(2x)\sin\pi x}_{g(x)-x}\,dx+\frac{1}{4} \quad \cdots ㉠$$

을 만족시킬 때, $\int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$ 의 값은? [4점]

① $-\frac{1}{\pi}$ ② $-\frac{1}{2\pi}$ ③ $-\frac{1}{3\pi}$ ④ $-\frac{1}{4\pi}$ ⑤ $-\frac{1}{5\pi}$

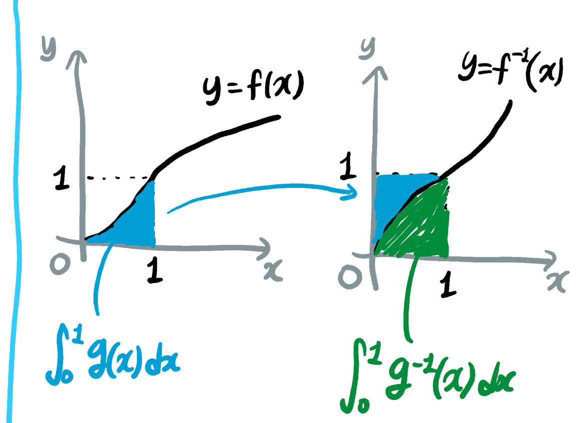
$$\int_0^1 g^{-1}(x)\,dx=2\int_0^1\{g(x)-x\}\,dx+\frac{1}{4}$$

$$=2\int_0^1 g(x)\,dx-2\underbrace{\int_0^1 x\,dx}_{=\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}$$

$$=2\int_0^1 g(x)\,dx-\frac{3}{4}$$

그리고 $g(x)=f'(2x)\sin\pi x+x$의 양변에 $x=0$과 $x=1$을 각각 대입하면 $g(0)=0$, $g(1)=1$임을 알 수 있다.

따라서 $\int_0^1 g(x)\,dx+\int_0^1 g^{-1}(x)\,dx=1$ 임을 오른쪽 그림을 통해 알 수 있다.



$$\Rightarrow \int_0^1 g(x)\,dx+\int_0^1 g^{-1}(x)\,dx=1$$

두 방정식

$$\int_0^1 g^{-1}(x)\,dx=2\int_0^1 g(x)\,dx-\frac{3}{4}$$

$$\int_0^1 g(x)\,dx+\int_0^1 g^{-1}(x)\,dx=1$$

을 연립하여 풀면 $\int_0^1 g(x)\,dx=\frac{7}{12}$, $\int_0^1 g^{-1}(x)\,dx=\frac{5}{12}$를 얻는다.

따라서 ㉠에서 $\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx=\frac{1}{12}$이므로

$$\int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi}{2}x\,dx=\int_0^1 f(2t)\cos\pi t\cdot 2dt \quad \left(\begin{array}{l}t=\frac{x}{2}\\ dt=\frac{dx}{2}\end{array}\right) \text{ 치환}$$

$$=2\left\{\underbrace{\left[f(2t)\cdot\frac{1}{\pi}\sin\pi t\right]_0^1}_{=0}-\int_0^1 2f'(2t)\cdot\frac{1}{\pi}\sin\pi t\,dt\right\}$$

$$=-\frac{4}{\pi}\int_0^1 f'(2t)\sin\pi t\,dt=-\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{12}=-\frac{1}{3\pi}$$

단답형

29. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제m항까지의 합을 S_m이라 하자. 모든 자연수 m에 대하여

$$S_m=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m+1}{n(n+m+1)}$$

일 때, $a_1+a_{10}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] 57

$$\frac{m+1}{n(n+m+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+m+1} \text{ 이므로}$$

$$S_m=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+m+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{2+m}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3+m}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4+m}+\cdots$$

따라서

$$S_1=1-\cancel{\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}+\cdots=\frac{3}{2}$$

이므로 $a_1=\frac{3}{2}$ 이다.

$$S_{10}=1-\cancel{\frac{1}{12}}+\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{13}}+\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{14}}+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{11}$$

$$S_9=1-\frac{1}{11}+\frac{1}{2}-\frac{1}{12}+\frac{1}{3}-\frac{1}{13}+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{10}$$

따라서 $a_{10}=S_{10}-S_9=\frac{1}{11}$ 이다.

$$\therefore a_1+a_{10}=\frac{3}{2}+\frac{1}{11}=\frac{35}{22}$$

$p=22$, $q=35$ 이므로 $p+q=57$

30. 양수 k에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=(k-|x|)e^{-x}$$

이라 하자. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $F(x)$에 대하여 $F(0)$의 최솟값을 $g(k)$라 하자.

모든 실수 x에 대하여 $F'(x)=f(x)$이고 $F(x)\ge f(x)$이다.

↳ F(x)는 f(x)의 부정적분

$g\left(\frac{1}{4}\right)+g\left(\frac{3}{2}\right)=pe+q$일 때, $100(p+q)$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x\to\infty}xe^{-x}=0$이고, p와 q는 유리수이다.) [4점] 25

$$f(x)=\begin{cases}(k-x)e^{-x} & (x\ge0)\\ (k+x)e^{-x} & (x<0)\end{cases} \text{ 이고}$$

$$\int(k-x)e^{-x}dx=-(k-x)e^{-x}-\int e^{-x}dx=-(k-x)e^{-x}+e^{-x}+C_1$$

$$\int(k+x)e^{-x}dx=-(k+x)e^{-x}+\int e^{-x}dx=-(k+x)e^{-x}-e^{-x}+C_2$$

이므로

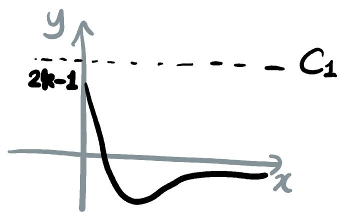
$$F(x)=\begin{cases}-(k-x)e^{-x}+e^{-x}+C_1 & (x\ge0)\\ -(k+x)e^{-x}-e^{-x}+C_2 & (x<0)\end{cases} \text{ 이다.}$$

$F(x)$가 실수 전체에서 미분 가능하므로 $x=0$에서도 연속이 되어야 한다.

따라서 $-k+1+C_1=-k-1+C_2$ 이므로 $\boxed{C_2-C_1=2}$ 이다.

그리고 $F(x)\ge f(x)$를 만족시켜야 하므로

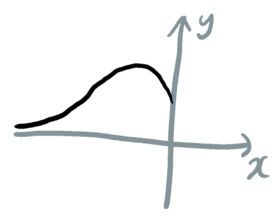
$x\ge0$일 때, $-(k-x)e^{-x}+e^{-x}+C_1\ge(k-x)e^{-x}$



↳ $(2k-2x-1)e^{-x}\le C_1$

$\boxed{k\le\frac{1}{2}\text{이면 } C_1\ge0 \text{ 이고, } k>\frac{1}{2}\text{이면 } C_1\ge 2k-1\text{이다.}}$

$x<0$일 때, $-(k+x)e^{-x}-e^{-x}+C_2\ge(k+x)e^{-x}$



↳ $(2k+2x+1)e^{-x}\le C_2$

$(2k+2x+1)e^{-x}$는 $x=-k+\frac{1}{2}$에서 최댓값 $2e^{k-\frac{1}{2}}$을 가진다.

따라서 $\boxed{k\le\frac{1}{2}\text{이면 } C_2\ge 2k+1\text{이고, } k>\frac{1}{2}\text{이면 } C_2\ge 2e^{k-\frac{1}{2}}\text{이다.}}$

(i) $k=\frac{1}{4}$일 때

$C_1\ge0$, $C_2\ge\frac{3}{2}$이고 $C_2-C_1=2$이므로

$F(0)$의 값이 최소가 되도록 하려면 $C_1=0$, $C_2=2$를 택하면 된다.

이때, $F(0)=\frac{3}{4}$이므로 $g\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}$이다.

(ii) $k=\frac{3}{2}$일 때

$C_1\ge2$, $C_2\ge2e$이고 $C_2-C_1=2$이므로

$F(0)$의 값이 최소가 되도록 하려면 $C_1=2e-2$, $C_2=2e$를 택하면 된다. 이때, $F(0)=2e-\frac{5}{2}$이므로 $g\left(\frac{3}{2}\right)=2e-\frac{5}{2}$이다.

$g\left(\frac{1}{4}\right)+g\left(\frac{3}{2}\right)=2e-\frac{7}{4}$이므로 $p=2$, $q=-\frac{7}{4}$이다.

$$\therefore 100(p+q)=100\times\frac{1}{4}=25$$

2025학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가 문제지 1

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 두 벡터 $\vec{a}=(4,0)$, $\vec{b}=(1,3)$에 대하여 $2\vec{a}+\vec{b}=(9,k)$일 때, k의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$2(4,0)+(1,3)$

$=(8,0)+(1,3)$

$=(9,3)$ $\therefore k=3$

24. 타원 $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점 사이의 거리가 6일 때, b^2의 값은? (단, $0<b<4$) [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

두 초점 중 x좌표가 양수인 것의 좌표를 $(c,0)$이라 하자.
$0<b<4$이므로 $c^2=16-b^2$이다.

두 초점 사이의 거리는 $2c=2\sqrt{16-b^2}$이고, 이는 문제에서 6으로 주어졌다. 따라서

$2\sqrt{16-b^2}=6$이므로 $b^2=7$

25. 좌표공간의 서로 다른 두 점 $A(a, b, -5)$, $B(-8, 6, c)$에 대하여 선분 AB의 중점이 zx평면 위에 있고, 선분 AB를 1:2로 내분하는 점이 y축 위에 있을 때, $a+b+c$의 값은? [3점]

① -8 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 8

선분 AB의 중점이 zx 평면 위에 있다.

→ 선분 AB의 중점의 y좌표는 0 이다.

→ $\frac{b+6}{2}=0$ $\therefore b=-6$

선분 AB를 1:2로 내분하는 점의 좌표

→ $\left(\frac{(-8)\times1+a\times2}{3}, \frac{6\times1+(-6)\times2}{3}, \frac{c\times1+(-5)\times2}{3}\right)$

→ $\left(\frac{2a-8}{3}, -2, \frac{c-10}{3}\right)$

→ y축 위에 있으므로 x좌표와 z좌표는 모두 0

$\therefore a=4, \quad c=10$

$\therefore a+b+c=4-6+10$
$=8$

26. 좌표평면에서 점 $(1, 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 6인 원을 C라 하자. 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $(n^2, 2n)$에서의 접선이 원 C와 만나도록 하는 자연수 n의 개수는? [3점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

포물선의 접선의 방정식 $(y_1y=2p(x+x_1))$은

$2ny=2(x+n^2) \Rightarrow x-ny+n^2=0$

직선 $x-ny+n^2=0$과 점 $(1,0)$ 사이의 거리는

$$\frac{|1\times1+(-n)\times0+n^2|}{\sqrt{1+n^2}}=\frac{1+n^2}{\sqrt{1+n^2}}=\sqrt{1+n^2}$$

이고, 이 거리가 6 이하가 되어야 포물선이 원 C와 만나게 된다.

$\sqrt{1+n^2}\le 6 \Rightarrow 1+n^2\le 36$

$\Rightarrow n^2\le 35$

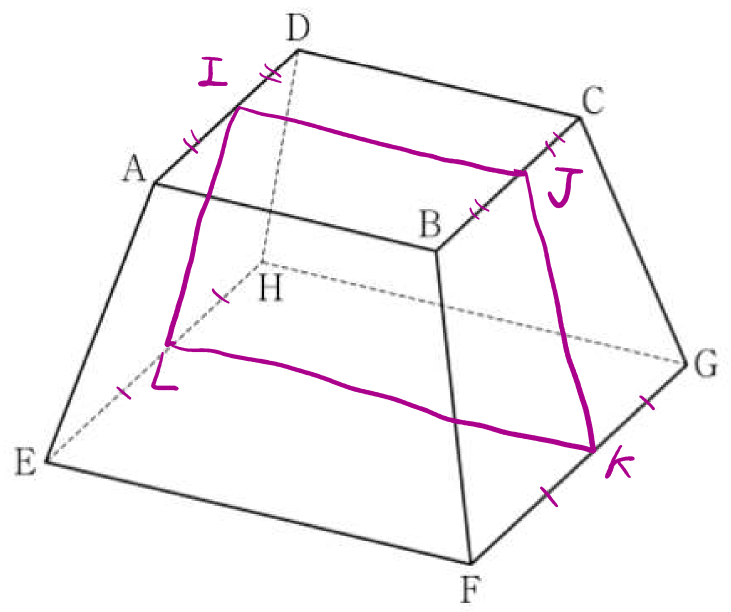
따라서 n의 값으로 가능한 자연수는

1, 2, 3, 4, 5로 5개이다.

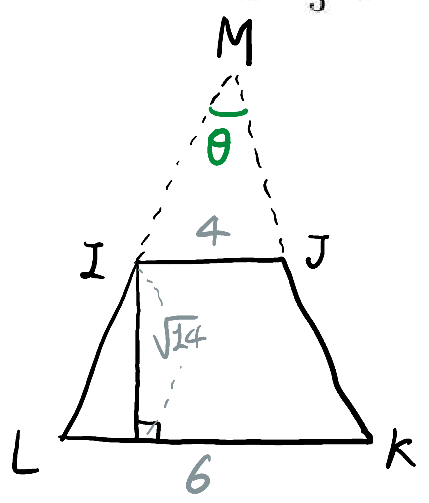
27. 그림과 같이 한 변의 길이가 각각 4, 6인 두 정사각형 ABCD, EFGH를 밑면으로 하고

$$\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH}$$

인 사각뿔대 ABCD−EFGH가 있다. 사각뿔대 ABCD−EFGH의 높이가 $\sqrt{14}$일 때, 사각형 AEHD의 평면 BFGC 위로의 정사영의 넓이는? [3점]

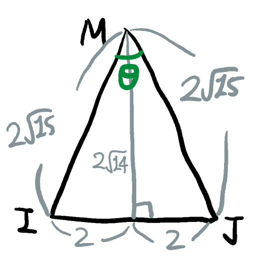


① $\frac{10}{3}\sqrt{15}$ ② $\frac{11}{3}\sqrt{15}$ ③ $4\sqrt{15}$ ④ $\frac{13}{3}\sqrt{15}$ ⑤ $\frac{14}{3}\sqrt{15}$



네 선분 AD, BC, FG, EH의 중점을 각각 I, J, K, L이라 하고,
두 직선 IL과 JK의 교점을 M이라 하면
두 평면 AEHD와 BFGC가 이루는 예각의 크기 θ는 ∠IMJ 이다.

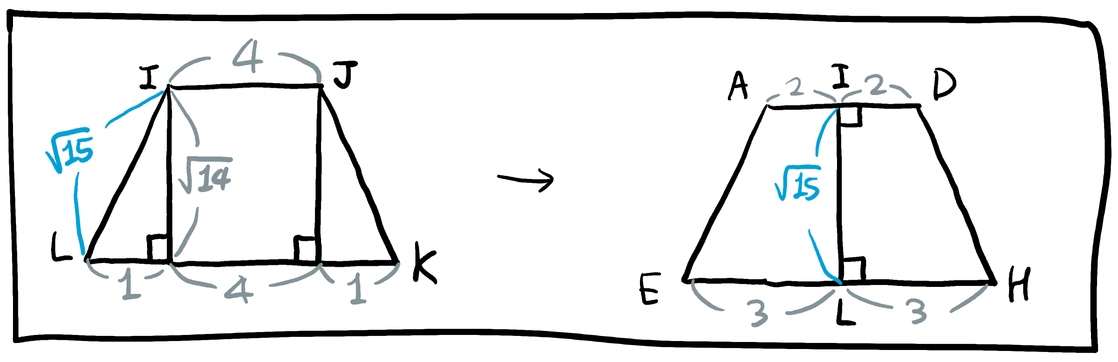
두 삼각형 MIJ와 MLK의 닮음비는 2:3이고
사다리꼴 ILKJ의 높이는 $\sqrt{14}$이므로 삼각형 MIJ의 높이는 $2\sqrt{14}$이다.



제2코사인법칙으로 θ를 구하면

$4^2 = (2\sqrt{15})^2 + (2\sqrt{15})^2 - 2\cdot 2\sqrt{15}\cdot 2\sqrt{15}\cos\theta$

↳ $16 = 120 - 120\cos\theta$ ∴ $\cos\theta = \frac{13}{15}$



위 그림에서 사다리꼴 AEHD의 넓이 S를 구하면

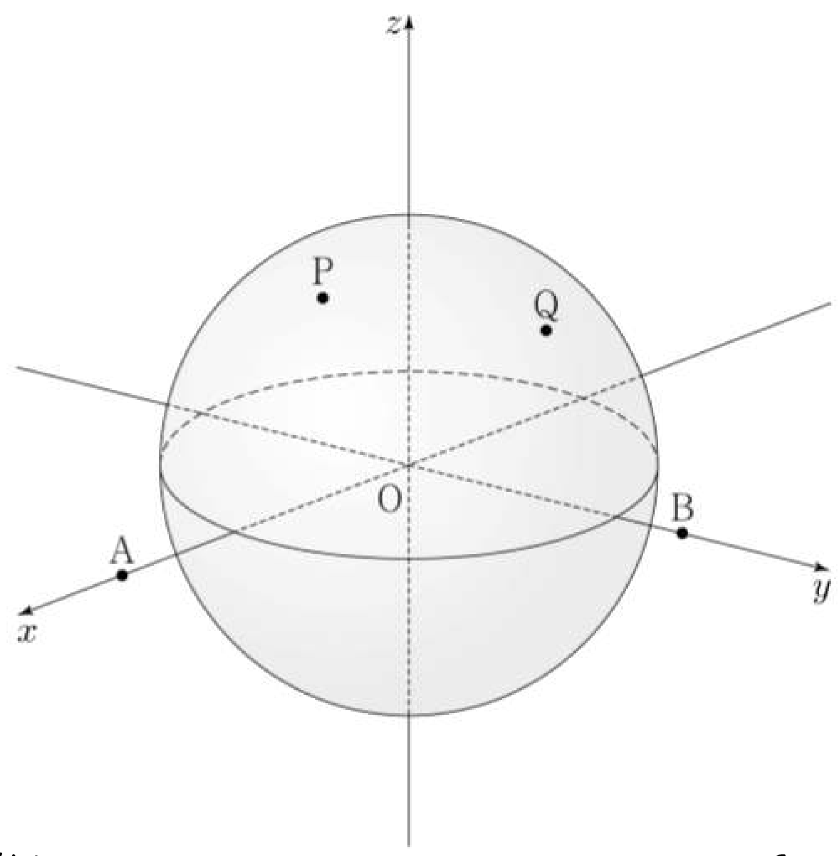
$S = \frac{1}{2}\times(4+6)\times\sqrt{15} = 5\sqrt{15}$

이므로 이 사다리꼴의 평면 BFGC 위로의 정사영의 넓이는

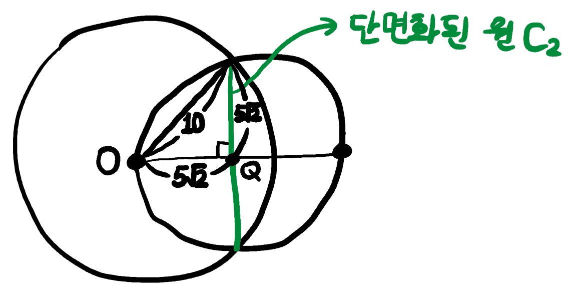
$S' = S\cos\theta = 5\sqrt{15}\times\frac{13}{15} = \frac{13}{3}\sqrt{15}$

28. 좌표공간에 두 점 $A(a, 0, 0)$, $B(0, 10\sqrt{2}, 0)$과 구 $S: x^2+y^2+z^2=100$이 있다. $\angle APO = \frac{\pi}{2}$인 구 S 위의 모든 점 P가 나타내는 도형을 C_1, $\angle BQO = \frac{\pi}{2}$인 구 S 위의 모든 점 Q가 나타내는 도형을 C_2라 하자. C_1과 C_2가 서로 다른 두 점 N_1, N_2에서 만나고 $\cos(\angle N_1ON_2) = \frac{3}{5}$일 때, a의 값은? (단, $a > 10\sqrt{2}$이고, O는 원점이다.) [4점]

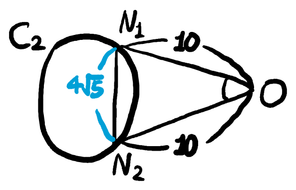
① $\frac{10}{3}\sqrt{30}$ ② $\frac{15}{4}\sqrt{30}$ ③ $\frac{25}{6}\sqrt{30}$ ④ $\frac{55}{12}\sqrt{30}$ ⑤ $5\sqrt{30}$



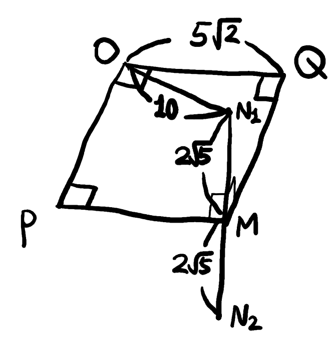
C_1 : 선분 AO를 지름으로 하는 구와 구 S의 교선(원)
C_2 : 선분 BO를 지름으로 하는 구와 구 S의 교선(원)



원 C_2의 중심을 Q라 할 때, 위 그림에서 $\overline{OQ} = 5\sqrt{2}$임을 알 수 있다.



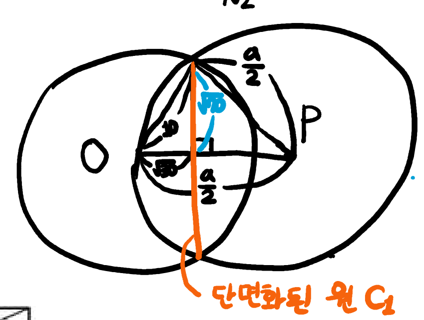
$\overline{ON_1} = \overline{ON_2} = 10$이고 $\cos(\angle N_1ON_2) = \frac{3}{5}$이므로
제2코사인법칙에 의해 $\overline{N_1N_2} = 4\sqrt{5}$이다.



원 C_1의 중심을 P라 하고 선분 N_1N_2의 중점을 M이라 하자.

$\overline{OM} = \sqrt{\overline{ON_1}^2 - \overline{N_1M}^2} = \sqrt{100-20} = \sqrt{80}$ 이므로

$\overline{OP} = \sqrt{\overline{OM}^2 - \overline{PM}^2} = \sqrt{80-50} = \sqrt{30}$ 이다.



왼쪽 그림에서 원 C_1의 반지름의 길이는
$\sqrt{10^2 - (\sqrt{30})^2} = \sqrt{100-30} = \sqrt{70}$ 이다.

그리고

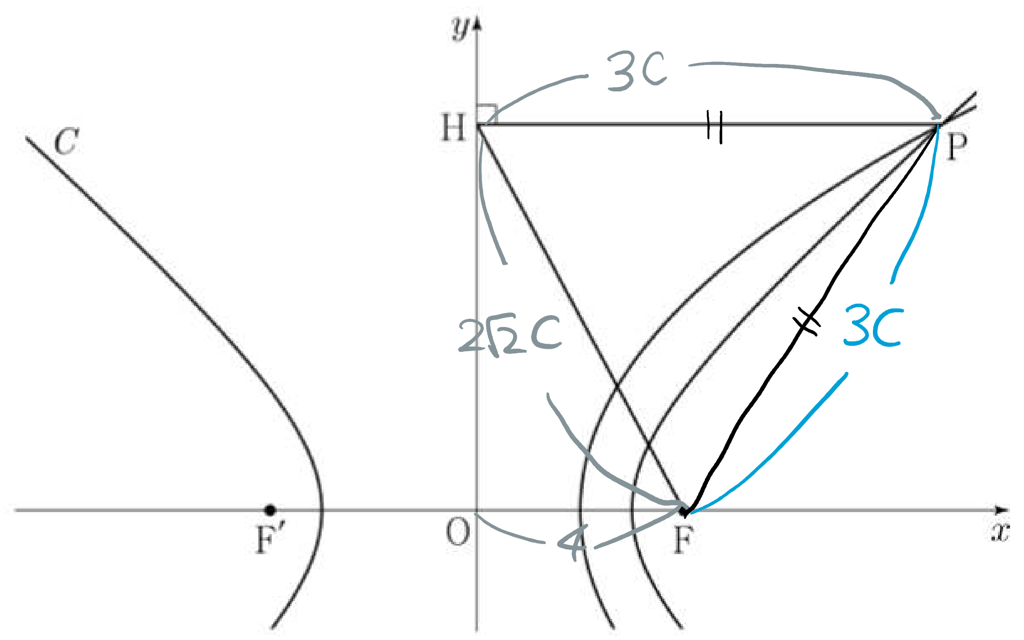
$\left(\frac{a}{2} - \sqrt{30}\right)^2 + (\sqrt{70})^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$이므로

전개하면 $\cancel{\frac{a^2}{4}} - \sqrt{30}a + 100 = \cancel{\frac{a^2}{4}}$ → $a = \frac{100}{\sqrt{30}} = \frac{10}{3}\sqrt{30}$ 이다.

단답형

29. 그림과 같이 두 점 F(4, 0), F′(−4, 0)을 초점으로 하는 쌍곡선 $C : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$이 있다. 점 F를 초점으로 하고 y축을 준선으로 하는 포물선이 쌍곡선 C와 만나는 점 중 제1사분면 위의 점을 P라 하자. 점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{PH} : \overline{HF} = 3 : 2\sqrt{2}$이다. $a^2 \times b^2$의 값을 구하시오. (단, $a > b > 0$) [4점]

63



어떤 양수 C에 대하여 $\overline{PH} = 3C$, $\overline{HF} = 2\sqrt{2}C$라 하자.

포물선의 정의에 의해 $\overline{PH} = \overline{PF}$이므로 $\overline{PF} = 3C$이다.

$\overline{OH} = \sqrt{\overline{HF}^2 - \overline{OF}^2} = \sqrt{8C^2 - 16}$ 이므로

점 P의 좌표는 $(3C, \sqrt{8C^2 - 16})$ 이고,

$\overline{PF} = 3C$ 이므로

$$\sqrt{(3C-4)^2 + (\sqrt{8C^2-16} - 0)^2} = \sqrt{17C^2 - 24C} = 3C$$

$$\Rightarrow 17C^2 - 24C = 9C^2 \Rightarrow 8C^2 - 24C = 0$$

$$\therefore C = 3$$

따라서 점 P의 좌표는 $(9, \sqrt{56})$이 된다.

$\overline{PF'} = \sqrt{\{9-(-4)\}^2 + (\sqrt{56})^2} = \sqrt{225} = 15$이므로

$\overline{PF'} - \overline{PF} = 15 - 9 = 6$ 이다.

따라서 $2a = 6$이므로 $a = 3 \Rightarrow a^2 = 9$이고,

$C^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 4^2 - 3^2 = 7$이다.

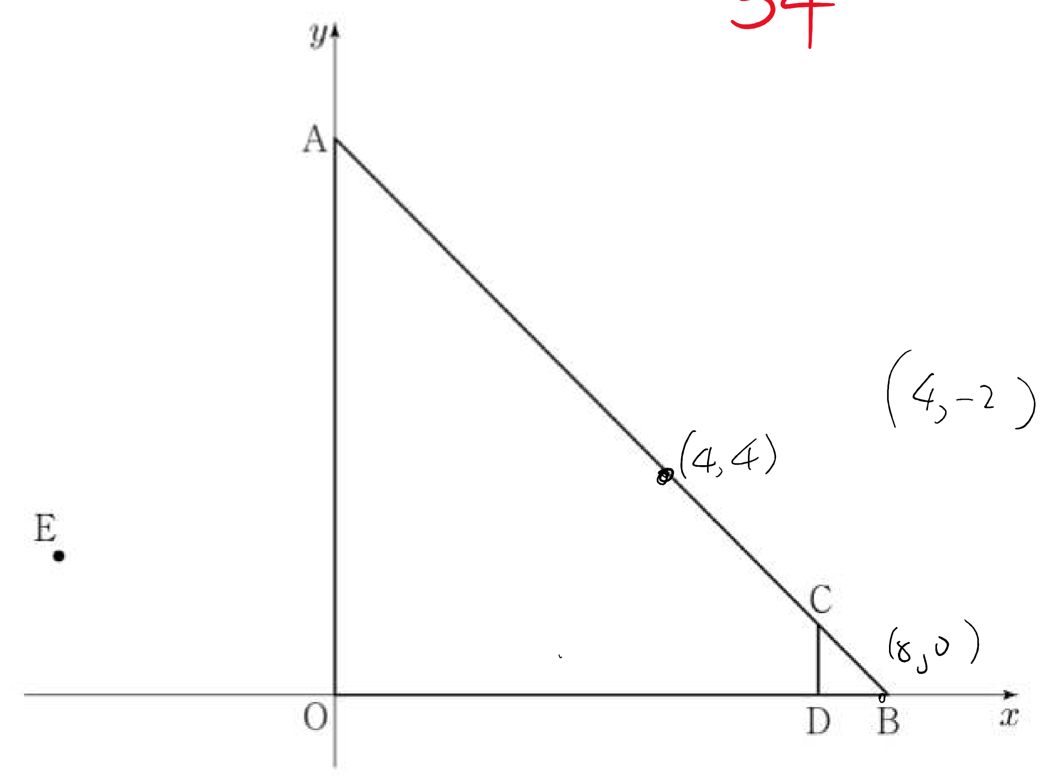
$$\therefore a^2 \times b^2 = 9 \times 7 = 63$$

30. 좌표평면 위에 다섯 점

A(0, 8), B(8, 0), C(7, 1), D(7, 0), E(−4, 2)

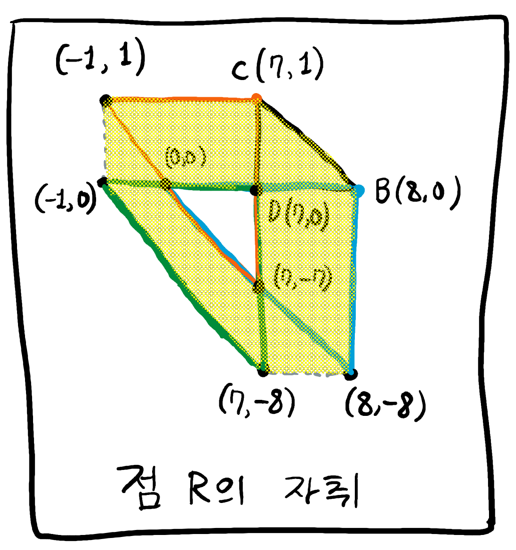
가 있다. 삼각형 AOB의 변 위를 움직이는 점 P와 삼각형 CDB의 변 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{OE}|^2$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M + m$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

54



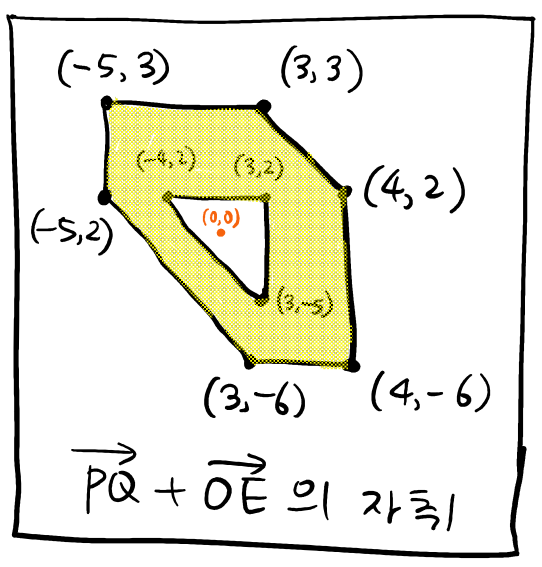
어떤 점 R에 대하여 $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{PQ}$라 하자.

$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$ 이므로 점 R의 자취를 그림으로 그리면 다음과 같다.



왼쪽 그림에서 노란색으로 칠한 영역이 점 R의 자취가 된다.

점 C, D, B를 기준으로 삼각형 AOB를 원점 대칭시킨 도형을 각각 그리고, 이 도형을 삼각형 CDB 내에서 움직인다고 생각하면 왼쪽과 같은 그림을 얻을 수 있다.



위에서 그린 점 R의 자취에 $\overrightarrow{OE} = (-4, 2)$를 더하면 왼쪽 그림과 같은 자취를 얻는다.

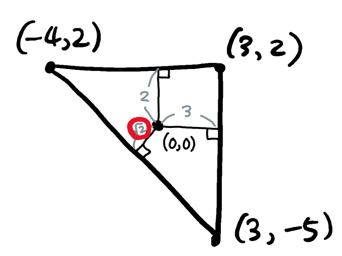
최댓값,,

왼쪽 그림에서 $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{OE} = (4, -6)$일 때 $|\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{OE}|^2$가 최대이며, 그 값은

$4^2 + (-6)^2 = 52$ 이다.

$\therefore M = 52$

최솟값,,



$|\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{OE}|^2$의 최솟값은 점 (0, 0)과 두 점 (−4, 2), (3, −5)를 지나는 직선 사이의 거리의 제곱이다.

$x + y + 2 = 0$

거리는 $\frac{|1\times0 + 1\times0 + 2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{2}$이므로 제곱하면 2가 된다.

$\therefore m = 54$

따라서 $M + m = 52 + 2 = 54$