제 2 교시

2025학년도 KUME 모의고사

수학 영역

성명		수험번호						-				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

밝아올 하늘 그 위로 퍼져가는 빛이 되어

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

2025학년도 KUME(쿠메) 모의고사

시행 : 2024년 10월 20일 (일)

집　필 : 고려대학교 수학교육과 소모임 KUME(쿠메) 25

박가언 문시윤 고창빈 김성하 김영훈 김유빈 박수현 서강 손승빈 위주영 유선빈 이상기 이효준 임소은 정재혁 조지은 허태성 홍영택

손해설 : 김성하 이상기

검　토 : 최제현 김민재 이성준 박가언 문시윤

KUME(쿠메) 모의고사에 관한 문의사항은 'KUME 모의고사' 인스타그램 DM(@kume_online)으로 문의바랍니다.

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $4^{1-\sqrt{3}} \times 2^{2\sqrt{3}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

$2^{2-2\sqrt{3}} \times 2^{2\sqrt{3}} = 2^2$

$\therefore 4$

2. 함수 $f(x)=2x^3-6x+3$ 에 대하여 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = f'(2)$

$f'(x) = 6x^2-6$

$\therefore f'(2) = 24-6 = 18$

3. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 a_{11} = 3a_4,\ a_6 + a_8 = 15$$

일 때, a_7 의 값은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

$a_n = a \cdot r^{n-1}$

$a_1 a_{11} = 3a_4$

$(a_6)^2 = 3a_4$

$a^2 r^{10} = 3ar^3$

$\underline{ar^7 = 3 = a_8}$

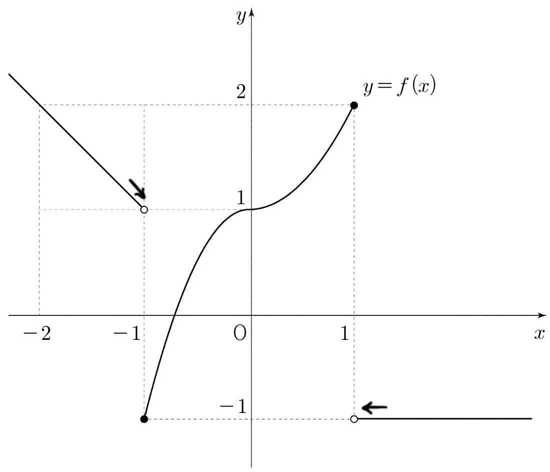
$a_6 + a_8 = 15$

$a_6 + 3 = 15$

$\underline{a_6 = 12}$

$a_6 = 12$, $a_8 = 3$ $\quad \therefore a_7 = 6$

4. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음과 같다.



$\displaystyle\lim_{x\to -1-} f(x) - \lim_{x\to 1+} f(x)$ 의 값은? [3점]

① −2 ② −1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$\displaystyle\lim_{x\to -1-} f(x) = 1$, $\displaystyle\lim_{x\to 1+} f(x) = -1$

$\therefore 1-(-1) = 2$

5. 다항함수 $f(x)$가

$$f'(x)=3x^2-2,\ f(5)+f(-5)=4$$

를 만족시킬 때, $f(-2)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$f(x)=x^3-2x+C$
$f(5)+f(-5)=2C=4$ $\quad \underline{C=2}$
$\therefore f(-2)=-8+4+2=-2$

6. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{8}(a_n+3b_n)=40,\ \sum_{n=1}^{8}(2a_n-b_n)=24$$

일 때, $\sum_{n=1}^{8}(a_n+b_n)$의 값은? [3점]

① 20 ② 24 ③ 28 ④ 32 ⑤ 36

$\sum_{n=1}^{8} a_n=\alpha,\ \sum_{n=1}^{8} b_n=\beta$

$\begin{cases}\alpha+3\beta=40\\ 2\alpha-\beta=24\end{cases}$ $\quad \underline{\alpha=16,\ \beta=8}$

$\therefore \alpha+\beta=24$

7. 함수

$$f(x)=\begin{cases}x^2+ax+b & (-3\le x\le 3)\\ -2x+4 & (x<-3 \text{ 또는 } x>3)\end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$의 값은? (단, a와 b는 상수이다.) [3점]

① -9 ② -7 ③ -5 ④ -3 ⑤ -1

$\begin{cases}9-3a+b=10\\ 9+3a+b=-2\end{cases}$

$6a=-12$ $\quad \underline{a=-2,\ b=-5}$

$\therefore a+b=-7$

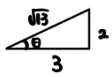
8. $0<\theta<\pi$인 θ에 대하여 $2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=3\sin(\pi+\theta)$일 때, $\sin\theta+\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{3\sqrt{13}}{13}$ ② $-\frac{2\sqrt{13}}{13}$ ③ $-\frac{\sqrt{13}}{13}$ ④ $\frac{2\sqrt{13}}{13}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{13}}{13}$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$

$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$

$2\cos\theta=-3\sin\theta \Rightarrow \tan\theta=-\frac{2}{3}$



$\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{13}}$, $\cos\theta=-\frac{3}{\sqrt{13}}$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{13}}-\frac{3}{\sqrt{13}}=-\frac{\sqrt{13}}{13}$

9. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=2t+1,\quad v_2(t)=t^2+3t+a$$

이다. 시각 $t=k$에서 점 P의 속도가 9, 점 Q의 속도가 30일 때, 시각 $t=k$에서 두 점 P와 Q 사이의 거리는? (단, a는 상수이다.) [4점]

① $\frac{100}{3}$ ② $\frac{110}{3}$ ③ 40 ④ $\frac{130}{3}$ ⑤ $\frac{140}{3}$

$V_1(k)=2k+1=9 \Rightarrow k=4$

$V_2(4)=16+12+a=30 \Rightarrow a=2$

$x_1(t)=t^2+t$

$x_2(t)=\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2+2t$

$x_1(4)=20$, $x_2(4)=\frac{160}{3}$

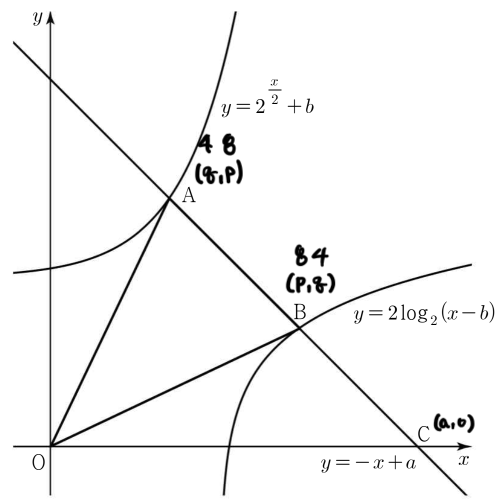
$\therefore |x_1(4)-x_2(4)|=\frac{100}{3}$

10. 두 양수 a, b에 대하여 직선 $y=-x+a$가 두 곡선

$$y=2^{\frac{x}{2}}+b,\quad y=2\log_2(x-b)$$ 역함수 : y=x 대칭

와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=-x+a$가 x축과 만나는 점의 좌표를 C라 하자. $\overline{AB}=\overline{BC}$이고 삼각형 OAB의 넓이가 24일 때, $a+b$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18



$\overline{AB}=\overline{BC}$이므로 $\triangle OAB=\triangle OBC=24$

$\triangle OBC=24$에서 B의 좌표를 $B(P, q)$라고 하면

$A(q, P)$이다. (y=x 대칭)

$a=P+q$. $\overline{AB}=\overline{BC}$이므로 $P=2q$. $\underline{a=3q}$.

$\triangle OBC=\frac{1}{2}\times\overline{OC}\times\overline{BH}=\frac{1}{2}\times 3q\times q=\frac{3}{2}q^2=24$ $\underline{q=4}$. $\boxed{a=12}$

점 A에서 $P=2^{\frac{q}{2}}+b$, $8=2^2+b$. $\boxed{b=4}$.

$\therefore a+b=16$

11. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f'(x)}{x\sqrt{x^2-x}} = 1, \quad \lim_{x \to 1} \frac{x^3-2x^2+x}{f(x)} = 3$$

을 만족시킬 때, $f(-2)$의 값은? [4점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

$\lim_{t \to \infty} \frac{f'(-t)}{-t\sqrt{t^2+t}} = 1$ 이므로

$f'(x)$가 최고차항의 계수가 -1인 이차함수임을 알 수 있다.

따라서, $f(x)$는 최고차항의 계수가 $-\frac{1}{3}$인 삼차함수.

$\lim_{x \to 1} \frac{x(x-1)^2}{f(x)} = 1$ 에서 $f(x)$가 $(x-1)^2$을 인수로 가지므로

$f(x) = -\frac{1}{3}(x-1)^2(x+K)$ 이고

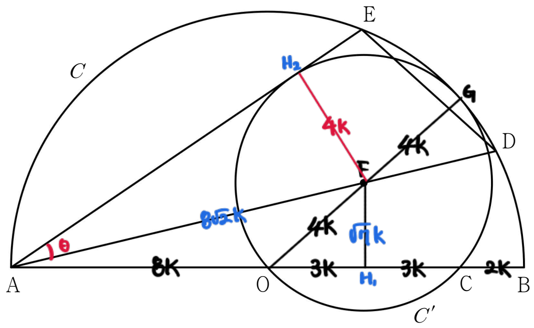
$\lim_{x \to 1} \frac{x(x-1)^2}{-\frac{1}{3}(x-1)^2(x+K)} = \frac{1}{-\frac{1}{3}(1+K)} = 3$ 이므로

$K = -2$

$\therefore f(x) = -\frac{1}{3}(x-1)^2(x-2)$

$f(-2) = 12$

12. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원 C가 있다. 선분 AB의 중점 O와 선분 OB를 $3:1$로 내분하는 점 C에 대하여 두 점 O, C를 지나고 반원 C의 호 AB에 접하는 원을 C'이라 하자.
반원 C의 호 AB 위의 두 점 D, E에 대하여 직선 AD는 원 C'의 중심을 지나고, 직선 AE는 원 C'에 접한다.
$\overline{\mathrm{DE}} = 3\sqrt{2}$일 때, 반원 C의 넓이는? [4점]



① 12π ② 14π ③ 16π ④ 18π ⑤ 20π

원 C'과 반원 O가 접하므로 O, F, G가 일직선상에 있음을 알 수 있다.

따라서 반원 C의 반지름이 원 C'의 반지름의 2배이다.

반원 C의 반지름을 8K라 하고, $\overline{OC} : \overline{CB} = 3:1$ 임을 이용하면

선분의 길이를 K로 표현할 수 있다.

$\triangle OFH$가 직각삼각형이므로 $\overline{FH_1} = \sqrt{17}K$ 이고, (피타고라스의 정리)

$\overline{AF} = \sqrt{128K^2} = 8\sqrt{2}K$ 임을 알수 있다.

$\overline{FH_2} = 4K$ (원 C'의 반지름) 이므로 $\sin\theta = \frac{4K}{8\sqrt{2}K} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

사인법칙을 이용하면 $\sin\theta = \frac{\overline{DE}}{2R} = \frac{3\sqrt{2}}{16K}$

$\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{16K}$ $\therefore K = \frac{3}{4}$

반원 C의 반지름은 $8K = 6$ 이므로

반원 C의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 6^2\pi = 18\pi$ 이다.

13. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_a^x f(t)dt & (x<a)\\ \displaystyle\int_{2a}^{x+a} f(t)dt & (x\ge a)\end{cases}$$

이다. 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\ge 0$이고, $g(0)=g(2a)=1$일 때, $f(4)$의 값은? (단, $a>0$) [4점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

g(x)를 더 쉽게 파악할 수 있도록 적분구간을 통일하자.

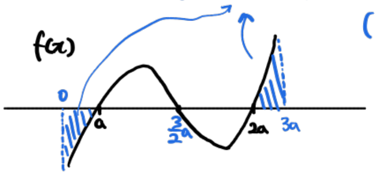
$$g(x)=\begin{cases}\int_a^x f(t)dt & (x<a)\\ \int_a^x f(t+a)dt & (x\ge a)\end{cases}$$

$$g'(x)=\begin{cases} f(x) & (x<a)\\ f(x+a) & (x\ge a)\end{cases}$$ g(x)는 미분가능한 함수이므로 $f(a)=f(2a)$

* $g(x)\ge 0$ 이 되려면 $x<a$에서 $f(x)<0$ 이어야 하고, $x>2a$에서 $f(x)>0$ 이어야 한다.

따라서, $f(a)=f(2a)=0$ 이고, $f'(a)>0$, $f'(2a)>0$ 임을 알 수 있다.

$g(0)=g(2a)$ 에서 $\int_a^0 f(t)dt=\int_{2a}^{3a} f(t)dt$ 이므로
아래 그림에서 색칠한 부분의 넓이가 같다.
($x=\frac{3}{2}a$에 대칭)
$\therefore f(\frac{3}{2}a)=0$



$f(x)=(x-a)(x-\frac{3}{2}a)(x-2a)$ 의 꼴을 가진다.

$$g(0)=\int_a^0 (x-a)(x-\tfrac{3}{2}a)(x-2a)\,dx=1$$
$$=\int_a^0\left(x^3-\tfrac{9}{2}ax^2+\tfrac{13}{2}a^2x-3a^3\right)dx$$
$$=\left[\tfrac{1}{4}x^4-\tfrac{3}{2}ax^3+\tfrac{13}{4}a^2x^2-3a^3\right]_a^0$$
$$=a^4=1 \quad \underline{a=1}.$$

$\therefore f(x)=(x-1)(x-\frac{3}{2})(x-2)$

$f(4)=15$

14. 2 이상의 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 100 이하의 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $\sum_{n=2}^{10} f(n)$의 값은? [4점]

(가) $\log_2(-8+8a-a^2)$의 값은 자연수이다. $-16+10a-a^2$이 2의 거듭제곱
(나) $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}$의 값은 자연수이다.

① 37 ② 42 ③ 47 ④ 52 ⑤ 57

(가)에서 $-8+8a-a^2>0$ (진수조건) $\Rightarrow 2<a<8$

$-8+8a-a^2$의 최댓값은 8이므로 $-8+8a-a^2$의 값은 2 or 4 or 8

$-8+8a-a^2=2 \rightarrow a=4\pm\sqrt{6}$ a는 자연수 X

$-8+8a-a^2=4 \rightarrow a=2$ or $a=6$

$-8+8a-a^2=8 \rightarrow a=4$ $\underline{a=2,4,6}$.

i) $a=2$

$n=2$ $\sqrt[2]{2b}$ 가 자연수 $b=2\cdot1^2 \sim 2\cdot7^2$ 7

$n=3$ $\sqrt[3]{2b}$ 가 자연수 $b=2^2\cdot1^3 \sim 2^2\cdot2^3$ 2

$n=4$ $\sqrt[4]{2b}$ 가 자연수 $b=2^3\cdot1^4$ 1

⋮ 1 1

$n=7$ $\sqrt[7]{2b}$ 가 자연수 $b=2^6\cdot1^7$ 1

$n=8,9,10$ (안됨) 0 $\boxed{13}$

ii) $a=4$

$n=2$ $\sqrt[2]{4b}$ 가 자연수 $b=1^2\sim10^2$ 10

$n=3$ $\sqrt[3]{4b}$ 가 자연수 $b=2\cdot1^3\sim2\cdot3^3$ 3

$n=4$ $\sqrt[4]{4b}$ 가 자연수 $b=2^2\cdot1^4\sim2^2\cdot2^4$ 2

$n=5$ $\sqrt[5]{4b}$ 가 자연수 $b=2^3\cdot1^5$ 1

⋮ 1 1

$n=8$ $\sqrt[8]{4b}$ 가 자연수 $b=2^6\cdot1^8$ 1

$n=9$, $n=10$ (안됨) 0 $\boxed{19}$

iii) $a=6$

$n=2$ $\sqrt[2]{6b}$ 가 자연수 $b=6\cdot1^2\sim6\cdot4^2$ 4

$n=3$ $\sqrt[3]{6b}$ 가 자연수 $b=6^2\cdot1^3$ 1

$n=4$ ⋯ $n=10$ (안됨) 0 $\boxed{5}$

$\therefore 13+19+5=37$

15. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $\lim_{x \to t} \frac{\{f(x)-x\} \times f'(x)}{(x-t)^2}$ 의 값이 존재하도록 하는 모든 실수 t의 값은 t_1, $t_2(t_2 > t_1)$이고, $t_2 - t_1 = 3$, $f(t_1) \times f(t_2) = 0$이다.

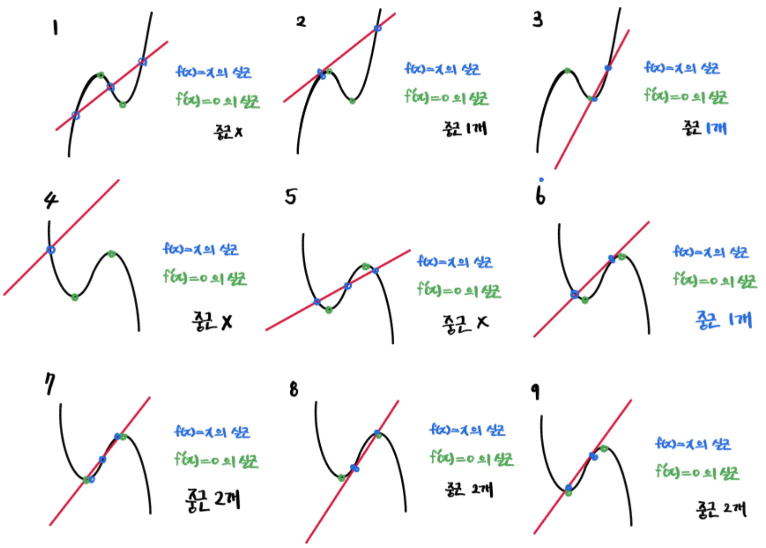
$f'(0) = 1$, $f'(2) < 0$일 때, $f(6)$의 값은? [4점]

① -28 ② -30 ③ -32 ④ -34 ⑤ -36

$\lim_{x \to t} \frac{\{f(x)-x\} \times f'(x)}{(x-t)^2}$ 의 값이 존재하기 위해서는

$f(x)=x$의 실근과 $f'(x)=0$의 실근이 t_1, t_2에서 중근을 가져야 한다.

$f(0)>0$, $f'(2)<0$ 이므로 $f(x)$는 극값을 가져야 한다.



1 최고차항의 계수 > 0, $f(x)=x$의 서로 다른 실근 3개
2 최고차항의 계수 > 0, $f(x)=x$의 서로 다른 실근 2개 (중근, 실근)
3 최고차항의 계수 > 0, $f(x)=x$의 서로 다른 실근 3개 (실근 2, 극값 실근 1)
4 최고차항의 계수 < 0, $f(x)=x$의 서로 다른 실근 1개 (실근 1, 허근 2)
5 최고차항의 계수 < 0, $f(x)=x$의 서로 다른 실근 3개
6 최고차항의 계수 < 0, $f(x)=x$의 서로 다른 실근 2개 (극값이 아닌 실근 1, 중근)
7 최고차항의 계수 < 0, $f(x)=x$의 서로 다른 실근 3개 (극소, 변곡점, 극대)
8 최고차항의 계수 < 0, $f(x)=x$의 서로 다른 실근 2개 (중근, 극대 실근)
9 최고차항의 계수 < 0, $f(x)=x$의 서로 다른 실근 2개 (극소 실근, 중근)

가능한 경우는 7, 8, 9

→ 다음 페이지에 계속

단답형

16. 방정식

$$\log_2(x+1) = 2 + \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$$

를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점] 3

$\log_2(x+1) - 2 = -\log_2(x-2)$

$\log_2\left(\frac{x+1}{4}\right) = \log_2\left(\frac{1}{x-2}\right)$

$\frac{x+1}{4} = \frac{1}{x-2}$ $(x+1)(x-2)=4$

$x^2-x-6=0$

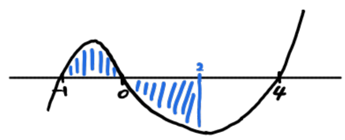
$(x-3)(x+2)=0$

$x = \cancel{-2}$ or $x=3$

진수조건

17. 곡선 $y = x^3 - 3x^2 - 4x$와 x축 및 두 직선 $x=-1$과 $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 할 때, $4S$의 값을 구하시오. [3점] 51

$x^3-3x^2-4x = x(x+1)(x-4)$



$\int_{-1}^{2} |x^3-3x^2-4x|\,dx$

$= \int_{-1}^{0} (x^3-3x^2-4x)\,dx + \int_{0}^{2} (-x^3+3x^2+4x)\,dx$

$= \int_{-1}^{0} (x^3-3x^2-4x)\,dx + \int_{2}^{0} (x^3-3x^2-4x)\,dx$

$= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2\right]_{2}^{0}$

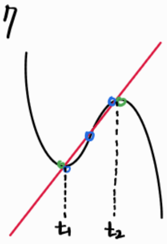
$= -\left(\frac{1}{4}+1-2\right) - (4-8-8)$

$= \frac{51}{4}$

#15 해설 이어서...

이제 t_1, t_2를 찾았으니 $t_2-t_1=3$ 과 $f(t_1)\times f(t_2)=0$ 을 이용하자.

7



$f(t_1)\times f(t_2)=0$ 에서

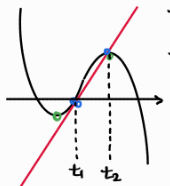
$f(t_1)$과 $f(t_2)$중 하나가 0이라는 것은

t_1과 t_2중 하나가 0이라는 뜻이다. ($y=x$ 와의 교점)

그러나 $f'(t_1)=f'(t_2)=0$ 이므로

$f'(0)=0\neq 1$ 이기 때문에 조건을 충족하지 못한다.

8



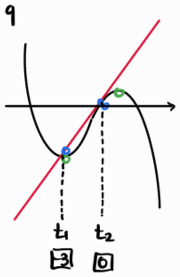
$t_2\neq 0$ (7번이 안 되는 이유)

$t_1=0$ 이므로 $t_2=3$ 이다.

그런데 $t_1<2<t_2$ 이고 $f'(2)>0$ 이므로

주어진 조건을 충족하지 못한다.

9



$t_1=0$ 일 수는 없다. (7번이 안 되는 이유)

$t_2=0$ 이므로 $t_1=-3$ 이다.

$f'(0)=1$ 이 될 수 있고 $f'(2)<0$ 도 가능하므로

모든 조건을 충족 가능하다.

$f(x)-x=0$ 은 $x=0$에서 중근 $x=-3$에서 실근을 가지므로

$f(x)-x=ax^2(x+3)$

$f(x)=ax^2(x+3)+x$ 라고 할 수 있다.

$f'(x)=a(2x(x+3)+x^2)+1$

$f'(-3)=9a+1=0$ $\quad \underline{a=-\frac{1}{9}}$

$\therefore f(x)=-\frac{1}{9}x^2(x+3)+x$

$f(6)=-\frac{1}{9}\cdot 36\cdot 9+6=-30$

18. x에 대한 삼차방정식

$$x^3-(2a-1)x^2+(a^2-2)x-a(a-2)=0$$

이 서로 다른 세 실근을 갖고, 이 세 실근이 크기순으로 등차수열을 이루도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오. 6 [3점]

$x^3-(2a-1)x^2+(a^2-2)x-a(a-2)=0$

$(x-1)(x-a)(x-a+2)=0$

i) $1<a-2<a$ ii) $a-2<1<a$ iii) $a-2<a<1$

$2(a-2)=a+1$ $2=2a-2$ $2a=a-1$

$\underline{a=5}$ $\underline{a=2}$ $\underline{a=-1}$

$\therefore 5+2+(-1)=6$

19. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(0,0)$에서의 접선과 점 $\mathrm{B}(3,1)$에서의 접선이 만나는 점의 x좌표가 2이고 두 접선이 서로 수직이다. $f'(0)>f'(3)$일 때, $f(-6)$의 값을 구하시오. [3점] 10

점 A에서 접선의 방정식 : $y=f'(0)x$

점 B에서 접선의 방정식 : $y=f'(3)(x-3)+1$

$\begin{cases} 2f'(0)=-f'(3)+1 & (\text{교점의 } x\text{좌표가 } 2) \\ f'(0)\times f'(3)=-1 & (\text{두 접선이 서로 수직}) \end{cases}$

$2f'(0)=\dfrac{1}{f'(0)}+1$

$\begin{cases} f'(0)=1 \\ f'(3)=-1 \end{cases}$ or $\begin{cases} f'(0)=-\frac{1}{2} \\ f'(3)=2 \end{cases}$ $f'(0)>f'(3)$ 이므로 $f'(0)=1,\ f'(3)=-1$

$f(x)=ax^3+bx^2+cx$ $f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f(3)=1 \rightarrow 27a+9b+c=1$ $f'(0)=1 \rightarrow \underline{c=1}$

$f'(3)=-1 \rightarrow 27a+6b+c=-1$

$\begin{cases} 27a+9b=-2 \\ 27a+6b=-2 \end{cases}$ $\underline{a=-\frac{2}{27},\ b=0}$

$f(x)=-\frac{2}{27}x^3+x$

$\therefore f(-6)=10$

20. 20 이하의 자연수 a와 정수 b에 대하여 두 함수

$$f(x)=\sin x,\quad g(x)=\cos\left(x-\frac{a\pi}{2}\right)+b$$

가 있다. 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\ge f(x)$이고 $f(k)=g(k)$가 되도록 하는 실수 k가 존재할 때, $a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M\times m$의 값을 구하시오. [4점] 21

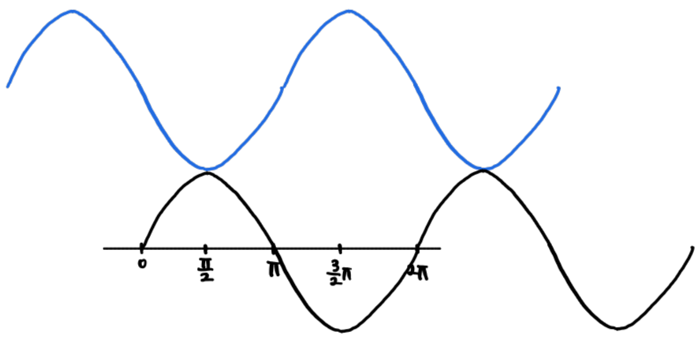
먼저 a와 b의 역할을 생각해보자.

a는 x축 방향의 평행이동과 관련이 있고,
b는 y축 방향의 평행이동과 관련이 있다.

f(x)와 g(x) 모두 주기가 2π임을 알아두자.

i) b가 최대인 경우 (g(x)의 최솟값 = f(x)의 최댓값)

$-1+b=1$ $\underline{b=2}$

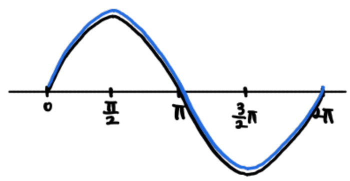


a의 후보 19, 15, 11, 7, 3 최대 $\underline{19}$

a+b의 최댓값 21

$\therefore M=21$

ii) b가 최소인 경우 (f(x)의 그래프와 g(x)의 그래프가 일치) $\underline{b=0}$



a의 후보 1, 5, 9, 13, 17 최소 1

a+b의 최솟값 1

$\therefore m=1$

$\therefore M\times m=21$

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<0) \\ f'(0)x+f(0) & (x\geq 0) \end{cases}$$

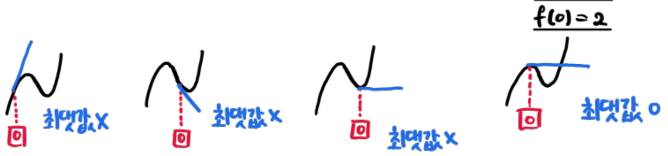
이다. 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $|g(2)|+|g(-2)|$의 값을 구하시오. [4점] 12

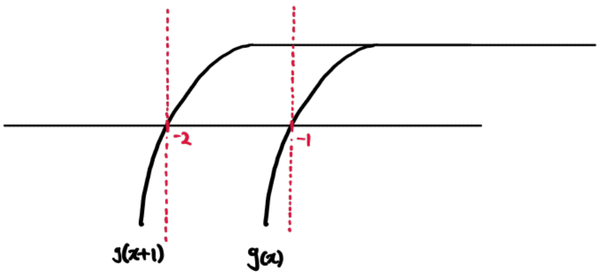
(가) $g(x+1)g(x)<0$을 만족시키는 실수 x의 값의 범위는 $-2<x<-1$이다.
(나) 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 최댓값 2를 갖는다.

$g(x)$의 의미를 파악하자.

$f'(0)x+f(0)$은 $x=0$에서의 접선이다.

(나)에서 $f(x)$가 $x=0$에서 극대임을 알 수 있다. $\underline{f'(0)=0}$ $\underline{f(0)=2}$





$-2<x<-1$에서 $g(x+1)>0$이고 $g(x)<0$인 경우! $\underline{g(-1)=0}$

$f'(0)=0$, $f(0)=2$ 이므로

$f(x)=x^3+ax^2+2$

$f(-1)=-1+a+2=0$ 에서 $a=-1$

$f(x)=x^3-x^2+2$

$g(2)=f(0)=2$

$g(-2)=f(-2)=-8-4+2=-10$

$\therefore |g(2)|+|g(-2)|=12$

22. 모든 항이 정수인 수열 $\{a_n\}$은 $|a_6|=12$이고 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{|a_{n+2}|-|a_{n+1}|}{|a_{n+1}|-|a_n|}=(-1)^n$$

을 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하고, 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 S_{10}의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M-m$의 값을 구하시오. [4점] 102

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $S_{4n+4}-S_{4n}=6$이다.
(나) $S_4<0$

$|a_n|=b_n$

$b_{n+2}-b_{n+1}=b_{n+1}-b_n$ n이 짝수 → 등차수열

$b_{n+2}-b_{n+1}=-b_{n+1}+b_n$ n이 홀수 → $b_n=b_{n+2}$

b_6을 12로 채우고 b_5를 P라고 하면,
아래와 같이 주기가 4로 반복되는 수열을 찾을 수 있다.

b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}	b_{11}	b_{12}	
P	12	P	2P-12	P	12	P	2P-12	P	12	P	2P-12	...
+	+	+	+									
+	+	−	+									
−	+	+	+									
+	+	+	−									
+	−	+	+									
+	+	−	−									
−	+	+	−									
+	−	+	−									
−	+	−	+									
+	−	−	+									
−	−	+	+									
−	−	−	+									
−	−	+	−									
+	−	−	−									
−	+	−	−									
−	−	−	−									

$a_n=\pm b_n$이므로 16가지 경우의 수를 고려하면 된다.

뒷장에서 알아보자. →

＊ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

#22 해설 이어서...

b_{4k+1}	b_{4k+2}	b_{4k+3}	b_{4k+4}	$S_{4k+4}-S_{4k}$
p	12	p	$2p-12$	
+	+	+	+	$4p$
+	+	−	+	$2p$
−	+	+	+	$2p$
+	+	+	−	24
+	−	+	+	$4p-24$
+	+	−	−	$24-2p$
−	+	+	−	$24-2p$
+	−	+	−	0
−	+	−	+	0
+	−	−	+	$2p-24$
−	−	+	+	$2p-24$
−	−	−	+	-24
−	−	+	−	$-2p$
+	−	−	−	$-2p$
−	+	−	−	$24-4p$
−	−	−	−	$-4p$

모든 항이 정수라는 조건에 의해 $S_{4k+4}-S_{4k}=6$ 이 가능한 경우는

$2p=6$, $24-2p=6$ $2p-24=6$ 으로 3가지 이다.

따라서 가능한 p의 값은 $3, 9, 15$이다.

그러나 $p=3$일때, $2p-12=-6<0$ 이므로,

b_n의 모든 항이 음이 아닌 정수일 수 없다. (모순)

이제, $S_4<0$ 임을 고려하여 최댓값과 최솟값을 구해보자.

i) $p=9$

$S_{10}=S_4+6+a_9+a_{10}$

S_4 값 중에서 최솟값은 $-4p=-36$ | a_9+a_{10} 값 중에서 최솟값은 $-9+12=3$

S_4 값 중에서 최댓값은 $2p-24=-6$ | a_9+a_{10} 값 중에서 최댓값은 $9+12=21$

S_{10}의 최솟값은 $-36+6+3=-27$

S_{10}의 최댓값은 $-6+6+21=21$

ii) $p=15$

$S_{10}=S_4+6+a_9+a_{10}$

S_4 값 중에서 최솟값은 $-4p=-60$ | a_9+a_{10} 값 중에서 최솟값은 $-15-12=-27$

S_4 값 중에서 최댓값은 $24-2p=-6$ | a_9+a_{10} 값 중에서 최댓값은 $15-12=3$

S_{10}의 최솟값은 $-60+6-27=-81$

S_{10}의 최댓값은 $-6+6+3=3$

i), ii)에 의하여 $M=21$, $m=-81$

$M-m=102$

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 6개의 숫자 2, 3, 3, 5, 5, 7을 모두 일렬로 나열하여 만들 수 있는 여섯 자리 자연수의 개수는? [2점]

① 90 ② 120 ③ 150 ④ 180 ⑤ 210

$$\frac{6!}{2!\cdot 2!} = 180.$$

24. 두 사건 A, B는 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(A^C)=\frac{3}{16}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cup B)$의 값은? (단, A^C는 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{7}{12}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{11}{12}$

$P(A^c) = 1-P(A)$

$\Rightarrow P(A)\{1-P(A)\}=\frac{3}{16}$

$\Rightarrow \{P(A)\}^2 - P(A)+\frac{3}{16} = \{P(A)-\frac{1}{4}\}\{P(A)-\frac{3}{4}\}=0.$

$\therefore P(A)=\frac{1}{4}$ or $P(A)=\frac{3}{4}.$

(i) $P(A)=\frac{1}{4}.$

$P(A)\cdot P(B) = P(A\cap B)$ ($\because$ A, B는 독립)

$\Rightarrow P(B)=2$ (X) ($\because 0\le P(B)\le 1$)

(ii) $P(A)=\frac{3}{4}$

$P(A)\cdot P(B)=P(A\cap B) \Rightarrow P(B)=\frac{2}{3}$

$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$= \frac{3}{4}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{11}{12}.$

25. 1부터 15까지의 자연수 중에서 임의로 서로 다른 2개의 수를 선택할 때, 선택된 2개의 수의 곱이 3의 배수일 확률은? [3점]

① $\frac{2}{21}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{4}{7}$ ④ $\frac{10}{21}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

두 수의 곱이 3의 배수

=) 하나 이상 3의 배수를 =) 여사건.

1 ~ 15 중 3의 배수 : 3.6.9.12.15. 5개

↓

3의 배수 X : 10개

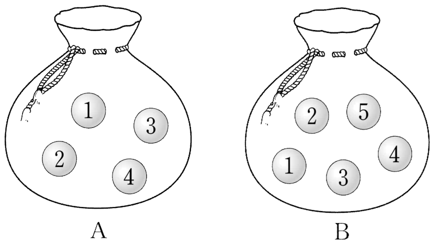
∘ 전체 경우의 수 $= {}_{15}C_2 = 105$

∘ 3의 배수 X 경우의 수 $= {}_{10}C_2 = 45$

$\therefore 1 - \frac{45}{105} = \frac{5}{7}$.

26. 주머니 A에는 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적힌 4개의 공이 들어 있고, 주머니 B에는 숫자 1, 2, 3, 4, 5가 하나씩 적힌 5개의 공이 들어 있다. 각각의 주머니에서 공을 하나씩 꺼내어 공에 적힌 숫자의 합이 8 이상이면 3점을 얻고, 7 이하이면 1점을 얻는 시행을 한다. 이 시행을 100번 반복하여 얻은 점수의 합을 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{E}(X)$의 값은? [3점]

① 120 ② 125 ③ 130 ④ 135 ⑤ 140



∘ 전체 경우의 수 : $4 \times 5 = 20$.

∘ 8 이상인 경우 : (3,5). (4,4). (4,5) 3개

=) 8 이상이 나오는 횟수를 Y라 하면,

7 이하가 나오는 횟수는 100-Y

=) Y는 $B(100, \frac{3}{20})$을 따름.

$\therefore E(Y) = 100 \times \frac{3}{20} = 15$.

얻을수 있는 점수 $X = 3Y + 100 - Y = 2Y + 100$

$\therefore E(X) = E(2Y+100) = 2E(Y) + 100 = 130$.

27. 한 가게에서 판매하는 인형 1개의 무게는 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따른다. 가게에서 판매하는 인형 중에서 49개를 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 구한 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $304.82 \le m \le 305.94$이다. 가게에서 판매하는 인형 중에서 144개를 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 구한 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이 $a \le m \le b$일 때, $b-a$의 값은? (단, 무게의 단위는 g이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58) = 0.99$로 계산한다.) [3점]

① 0.84 ② 0.86 ③ 0.88 ④ 0.9 ⑤ 0.92

· 49개, 신뢰도 95%

⇒ 신뢰구간의 길이

: $305.94 - 304.82 = 2 \cdot 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{49}}$

$1.08 = 2 \cdot 1.96 \cdot \frac{\sigma}{7}$ ⇒ $\sigma = 2$

· 144개, 신뢰도 99%

⇒ $b-a = 2 \cdot 2.58 \cdot \frac{2}{\sqrt{144}} = 0.86$

28. 흰색 카드와 검은색 카드가 각각 10장 이상 있다. 이 카드들과 두 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 두 개의 주사위를 동시에 던져
> 나온 수의 합이 7 이상이면
> 흰색 카드를 2장 가져오고,
> 나온 눈의 수의 합이 6 이하이면
> 검은색 카드를 1장 가져온다.
> 단, 두 주사위를 던져 나온 눈의 수가 같으면
> 합의 크기에 상관없이
> 흰색 카드만 1장 가져온다.

이 시행을 5번 반복한 후 가져온 모든 카드의 개수가 8 이상일 때, 흰색 카드의 개수가 짝수일 확률은? [4점]

① $\frac{13}{16}$ ② $\frac{59}{72}$ ③ $\frac{119}{144}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ $\frac{121}{144}$

· 흰색 2장 : $\frac{1}{2}$, 흰색 1장 : $\frac{1}{6}$, 검은색 1장 : $\frac{1}{3}$.

· 카드를 8장 이상 가져오려면

1) 2장 3번. 1장 2번
2) 2장 4번. 1장 1번
3) 2장 5번.

⇒ 확률 : $\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot ({}_5C_3 + {}_5C_4 + {}_5C_5) = \frac{1}{2}$

· 흰색 카드가 짝수장이려면

1)의 경우 a) 흰2 × 3 , 흰1 × 2 → $\underbrace{\frac{5!}{2!3!}}_{순서}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^3}_{흰2}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{6}\right)^2}_{흰1}$

b) 흰2 × 3, 검1 × 2 → $\underbrace{\frac{5!}{2!3!}}_{순서}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^3}_{흰2}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^2}_{검1}$

2)의 경우 - c) 흰2 × 4, 검1 × 1 → $\underbrace{\frac{5!}{4!}}_{순서}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^4}_{흰2}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)}_{검1}$

3)의 경우 - d) 흰2 × 5 → $\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^5}_{흰2}$

⇒ $\frac{119}{288}$ $\therefore \frac{\frac{119}{288}}{\frac{1}{2}} = \frac{119}{144}$

단답형

29. 집합 $X = \{x \mid x\text{는 9 이하의 자연수}\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$의 개수를 구하시오. [4점] 346

(가) 7 이하의 모든 자연수 x에 대하여
$f(x) \le f(x+2)$이다.
(나) $f(7) \times f(8) \times f(9) = 30$

(가) $f(1) \le f(3) \le f(5) \le f(7) \le f(9)$
$f(2) \le f(4) \le f(6) \le f(8)$

(나) 곱해서 30이 나오는 9이하의 순서쌍은
$(1,5,6)$, $(2,3,5)$

(i) $f(9)=6$
1) $f(7)=5$, $f(8)=1$.
$f(1) \le f(3) \le f(5) \le 5 \Rightarrow {}_5H_3$개
$f(2) \le f(4) \le f(6) \le 1 \Rightarrow {}_1H_3$개
$\therefore {}_5H_3 \times {}_1H_3 = {}_7C_3 \times 1 = 35$개
2) $f(7)=1$, $f(8)=5$.
1)과 같이 $\Rightarrow {}_1H_3 \times {}_5H_3 = 35$개

(ii) $f(9)=5$
1) $f(7)=1$, $f(8)=6$.
(1)과 같이 $\Rightarrow {}_1H_3 \times {}_6H_3 = 1 \times {}_8C_3 = 56$개
2) $f(7)=6$, $f(8)=1$
X (∵ (가) 위배)

(iii) $f(9)=1 \Rightarrow$ 불가.

(iv) $f(9)=5$.
1) $f(7)=3$, $f(8)=2$.
$\Rightarrow {}_3H_3 \times {}_2H_3 = 40$개
2) $f(7)=2$, $f(8)=3$
$\Rightarrow {}_2H_3 \times {}_3H_3 = 40$개.

(v) $f(9)=3$.
1) $f(7)=2$, $f(8)=5$.
$\Rightarrow {}_2H_3 \times {}_5H_3 = 140$개.
2) $f(7)=5$, $f(8)=2 \Rightarrow$ X

(vi) $f(9)=2 \Rightarrow$ X

$\therefore (35+35+56+40+40+140)$개 $= 346$개.

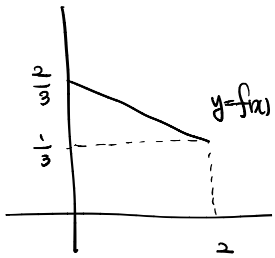
30. 두 연속확률변수 X와 Y가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le 2$, $0 \le Y \le 2$이고, X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$, $g(x)$이다.
함수 $f(x)$는 $f(x) = -\frac{1}{6}x + \frac{2}{3}\ (0 \le x \le 2)$이고,
두 상수 $p\left(0 < p < \frac{2}{3}\right)$, $m\,(0 < m < 2)$에 대하여 $g(x)$는

$$g(x) = \begin{cases} f(x) - p & (0 \le x < m) \\ f(m) - p & (m \le x \le 2) \end{cases}$$

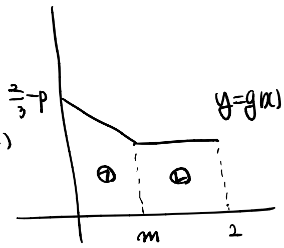
이다. 두 확률변수 X, Y가 다음 조건을 만족시킨다. 320

$t \le \alpha$인 모든 양수 t에 대하여
$\mathrm{P}(|X-1| \le t) - \mathrm{P}(|Y-1| \le t) = 2pt$가 되도록 하는
양수 $\alpha\,(0 < \alpha < 1)$의 최댓값은 $\frac{1}{4}$이다.

$6 \times \frac{m}{p}$의 값을 구하시오. [4점]

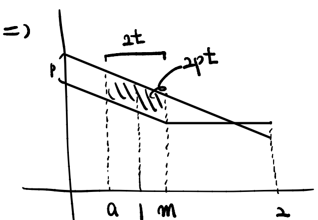


$\Rightarrow$



$\mathrm{P}(|X-1| \le t) - \mathrm{P}(|Y-1| \le t) = 2pt \Rightarrow 0 < t \le \frac{1}{4}$ 성립 (∵ α 최댓값 : $\frac{1}{4}$)

$\Rightarrow$



$a = \frac{3}{4} \Leftarrow m$이 $\frac{5}{4}$가 되어야 함!

$\therefore f(m) = f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{11}{24}$.

$g(x)$의 그래프에서

㉠: $\left(\frac{2}{3} - p + \frac{11}{24} - p\right) \times \frac{5}{4} \times \frac{1}{2}$

㉡: $\frac{3}{4} \times \left(\frac{11}{24} - p\right)$

㉠+㉡ $= \frac{67}{64} - 2p = 1$

$\therefore p = \frac{3}{128} \Rightarrow 6 \times \frac{m}{p} = 320$.

※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{x\to0}\frac{e^{8x}-1}{2x}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\lim_{x\to0}\frac{e^{8x}-1}{8x}\times4=4$

24. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2 x-1)\sec^2 x\,dx$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

$\sec^2 x-1=\tan^2 x$

$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\cdot\sec^2 x\,dx$

$\tan x=t$ 라고 하자.

$\Rightarrow \tan0=0,\ \tan\frac{\pi}{4}=1.\quad \sec^2 x\,dx=dt$

$\therefore \int_0^1 t^2\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$

25. 매개변수 $t\,(t>2)$로 나타내어진 곡선

$$x=-t^2-2t,\quad y=\frac{2}{3}(2t-4)^{\frac{3}{2}}$$

에서 $t=\frac{13}{2}$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{5}$ ② $-\frac{2}{5}$ ③ $-\frac{3}{5}$ ④ $-\frac{4}{5}$ ⑤ -1

$\frac{dx}{dt}=-2t-2$. $\frac{dy}{dt}=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}(2t-4)^{\frac{1}{2}}\cdot 2$

$=2(2t-4)^{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{2(2t-4)^{\frac{1}{2}}}{-2(t+1)}=\frac{(2t-4)^{\frac{1}{2}}}{-(t+1)}$

$t=\frac{13}{2}$ 대입 $\Rightarrow \frac{9^{\frac{1}{2}}}{-\frac{15}{2}}=-\frac{2}{5}$.

26. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}\ln x$는 $x=a$에서 극값을 갖는다. $x=a$에서 $x=4a$까지의 곡선 $y=f(x)$의 길이는? [3점]

① $\frac{7}{8}+\frac{\ln 2}{2}$ ② $\frac{9}{8}+\frac{\ln 2}{2}$ ③ $\frac{11}{8}+\frac{\ln 2}{2}$ ④ $\frac{13}{8}+\frac{\ln 2}{2}$ ⑤ $\frac{15}{8}+\frac{\ln 2}{2}$

$f'(x)=x-\frac{1}{4x} \Rightarrow f'(a)=a-\frac{1}{4a}=0 \quad \therefore a=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{2}\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$

$=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\sqrt{1+x^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{16x^2}}\,dx$

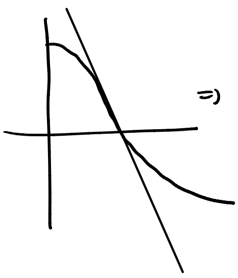
$=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\sqrt{x^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{16x^2}}\,dx$

$=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(x+\frac{1}{4x}\right)dx=\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}\ln x\right]_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{15}{8}+\frac{1}{2}\ln 2$

27. 함수 $f(x) = -\sin^2 x + 2\cos x$가 있다. $0 < t < \pi$인 실수 t에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 y절편의 최댓값은? [3점]

① $\frac{2\sqrt{3}\pi+1}{4}$ ② $\frac{\sqrt{3}\pi+1}{2}$ ③ $\frac{2\sqrt{3}\pi+3}{4}$ ④ $\frac{\sqrt{3}\pi+1}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}\pi+2}{4}$

함수 $f(x)$의 그래프를 그려보면



$\Rightarrow$ 변곡점에서의 접선이 y절편이 최대!

$f'(x) = -2\sin t \cdot \cos t - 2\sin t$

$f''(x) = -2\cos^2 t + 2\sin^2 t - 2\cos t$

$= -4\cos^2 t - 2\cos t + 2$

$= -2(\cos t + 1)(2\cos t - 1) = 0$

$\therefore \cos t = -1$ or $\cos t = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$에서 변곡점. $(\because 0 < t < \frac{\pi}{3})$

· 접선의 방정식 : $y = f'(\frac{\pi}{3})(x - \frac{\pi}{3}) + f(\frac{\pi}{3})$

$\Rightarrow$ y절편 : $f'(\frac{\pi}{3}) \cdot (-\frac{\pi}{3}) + f(\frac{\pi}{3}) = \frac{2\sqrt{3}\pi+1}{4}$

· $f'(\frac{\pi}{3}) = -\frac{3}{2}\sqrt{3}$, $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{4}$

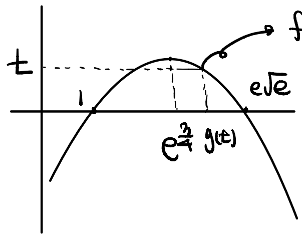
28. 함수 $f(x) = -2(\ln x)^2 + 3\ln x$에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x) = t\left(0 \le t < \frac{9}{8}\right)$의 실근의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 함수 $h(t) = tg(t)$가 $t = k$에서 최댓값을 가질 때, $\int_0^k g(t)\,dt$의 값은? [4점]

① $e - e\sqrt{e}$ ② $2e - e\sqrt{e}$ ③ $3e - e\sqrt{e}$ ④ $4e - e\sqrt{e}$ ⑤ $5e - e\sqrt{e}$

$f(x) = \ln x(-2\ln x + 3) = 0 \Rightarrow x = 1$ or $x = e\sqrt{e}$

$f'(x) = -4\ln x \cdot \frac{1}{x} + \frac{3}{x} = 0 \Rightarrow x = e^{\frac{3}{4}}$

$\Rightarrow$ $f(x)$의 그래프를 그리면



$\Rightarrow f = g^{-1} \Rightarrow g'(t) = \frac{1}{f'(g(t))}$

$h'(t) = g(t) + tg'(t) = g(t) + \frac{t}{f'(g(t))} = \left(t + \frac{f(t)}{f'(t)}\right) \circ (g(t))$

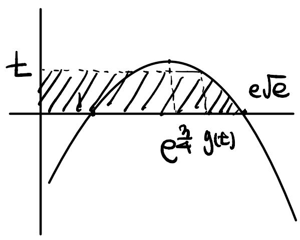
$e^{\frac{3}{4}} < g(t) \le e^{\frac{3}{2}}$,

$t + \frac{f(t)}{f'(t)} = t + \frac{(-2(\ln t)^2 + 3\ln t)}{(-4\ln t + 3)\frac{1}{t}} = t \cdot \frac{-2(\ln t)^2 - \ln t + 3}{-4\ln t + 3} = 0$

$\Rightarrow \ln g(x) = 1$ or $-\frac{3}{2} \Rightarrow g(x) = e$에서 최대

$\Rightarrow k = 1$. $\int_0^1 g(t)\,dt = e + \int_e^{e\sqrt{e}} (-2(\ln x)^2 + 3\ln x)\,dx$

$= e + \left[-2x(\ln x)^2 + 7x\ln x - 7x\right]_e^{e\sqrt{e}} = 3e - e\sqrt{e}$



단답형

29. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = k$ (단, k는 양수이다.)
>
> (나) 모든 자연수 n에 대하여 $|a_n - \sqrt{S_{4n}}| < b_n$이다.

k의 최솟값이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] 17

$a_n = 2an+b$, $S_n = an^2+(a+b)n$ 이라 하자.

$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n b_n \times \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = k\times 0 = 0$

⇒ (나)의 양변에 ($n\to\infty$) 극한을 씌우면

$\lim_{n\to\infty}(a_n - \sqrt{S_{4n}}) = 0$

⇒ $\lim_{n\to\infty}(2an+b-\sqrt{16an^2+4(a+b)n}) = 0$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{4a^2n^2+4abn+b^2-16an^2-4(a+b)n}{(2an+b)+\sqrt{16an^2+4(a+b)n}} = 0$

⇒ $4a^2 = 16a$, $4ab = -4(a+b)$

∴ $a=4\ (\because a\neq 0)$, $b=\frac{4}{3}$ ⇒ $a_n = 8n+\frac{4}{3}$

⇒ $k = \lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty}(8n+3)b_n = 8\lim_{n\to\infty} nb_n + 3\lim_{n\to\infty} b_n$

∴ $\lim_{n\to\infty} nb_n = \frac{k}{8}$ $(\because \lim_{n\to\infty} b_n = 0)$

⇒ (나)에서 $n|a_n - S_{4n}| < nb_n$

⇒ $\lim_{n\to\infty} n|a_n - S_{4n}| \le \lim_{n\to\infty} nb_n = \frac{k}{8}$

$\lim_{n\to\infty} n|a_n - S_{4n}| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{16}{9}n}{8n+\frac{3}{4}+\sqrt{64n^2+\frac{16}{3}n}} = \frac{\frac{16}{9}}{8+\sqrt{64}} = \frac{1}{9}$

∴ $\frac{1}{9} \le \frac{k}{8}$ ⇒ $\frac{8}{9} \le k$. ∴ $p=9$, $q=8$ ⇒ $p+q=17$.

30. 삼차함수 $f(x)$와 함수 $g(x) = x^2e^{x-2}$가 있다. 다음 조건을 만족시키는 연속함수 $h(x)$가 존재하고, 이때 모든 함수 $h(x)$에 대하여 $h(2)-h(-2)$의 최댓값과 최솟값이 각각 12, 4이다.

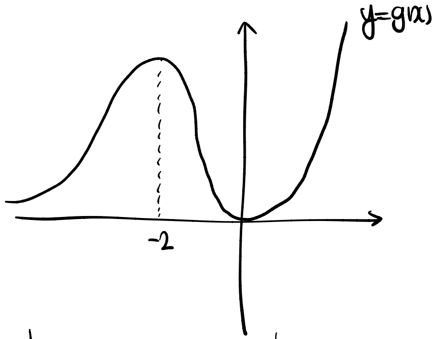
> $x_1 < x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 부등식
>
> $f(x_1) \le h(x_1) \le h(x_2) \le g(x_2)$
>
> 가 성립한다.

$f(-1) = -8$일 때, $f(5)$의 값을 구하시오. 46

(단, $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$) [4점]

부등식 조건을 통해 $f(x) \le h(x) \le g(x)$, $h(x)$는 감소X.

$g'(x) = (x^2+2x)e^{x-2}$이므로 $g(x)$는 그려보면

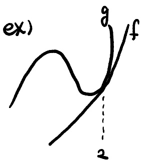


⇒ $h(2)$ 최댓값: $g(2)=4$, $h(-2)$ 최댓값: 0 (0 이상시 감소X 조건 위배)

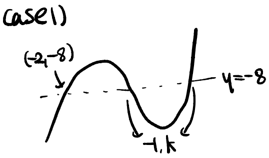
· $h(2)-h(-2)$의 최솟값: $h(2)$ 최소, $h(-2)$ 최대 ⇒ $h(2)$ 최소: 4.

· $h(2)-h(-2)$의 최댓값: $h(2)$ 최대, $h(-2)$ 최소 ⇒ $h(-2)$ 최소: -8

∴ $h(2)=4$ ⇒ $f(2)=g(2)=4$, $f(x)\le g(x)$ 이므로 $f'(2)=g'(2)=8$ → ex)



case1)

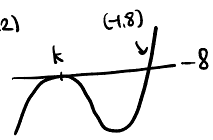


⇒ $f(x) = a(x+2)(x+1)(x-k)-8$

$f(2)=4$. $f'(2)=8$이므로

$a=\frac{1}{12}$, $k=-10$ (X) ($\because k>-2$)

case2)



⇒ $f(x) = a(x-k)^2(x+1)-8$

⇒ $a=\frac{1}{9}$, $k=-4$ (O)

∴ $f(x) = \frac{1}{9}(x+4)^2(x+1)-8$ ⇒ $f(5)=46$

> ∗ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 좌표공간의 점 A$(-2, 5, 2)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 B라 하자. 점 C$(0, -2, 4)$에 대하여 선분 BC의 길이는? [2점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

$B=(2,-5,-2)$

$\therefore \overline{BC}=\sqrt{4+9+36}=7$

24. 직선 $y=3x+2$가 포물선 $y^2=4p(x-1)$과 오직 한 점에서 만날 때, 양수 p의 값은? [2점]

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

1) $(3x+2)^2=4p(x-1)$

$9x^2+12x+4=4px-4p$

$9x^2+2(6-2p)x+4+4p=0$

$D/4=(6-2p)^2-9(4+4p)$

$=36-24p+4p^2-36-36p$

$=4p^2-60p=4p(p-15)=0$

$\therefore p=0$ or $p=15$

↳ 포물선 만족 X

2) $y^2=4p(x-1)$ 위를 기울기가 3으로 지나는 접선은

$y=3(x-1)+\frac{p}{3}=3x+\frac{p}{3}-3$

$\therefore \frac{p}{3}-3=2 \quad \therefore p=15$

25. 서로 평행하지 않은 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 에 대하여 두 벡터 $\vec{x}$, $\vec{y}$ 가

$$3\vec{x}+\vec{y}=6\vec{a}+\vec{b},\ 2\vec{x}-\vec{y}=4\vec{a}-6\vec{b}$$

를 만족시킨다. $\vec{x}+3\vec{y}=m\vec{a}+n\vec{b}$ 일 때, 두 상수 m, n 에 대하여 $m+n$ 의 값은? (단, $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$) [3점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

$$\begin{array}{rl} & 3\vec{x}+\vec{y}=6\vec{a}+\vec{b} \\ + & 2\vec{x}-\vec{y}=4\vec{a}-6\vec{b} \\ \hline & 5\vec{x}=10\vec{a}-5\vec{b} \end{array}$$

$\therefore \vec{x}=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{y}=4\vec{b}$

$\vec{x}+3\vec{y}=2\vec{a}+11\vec{b}$

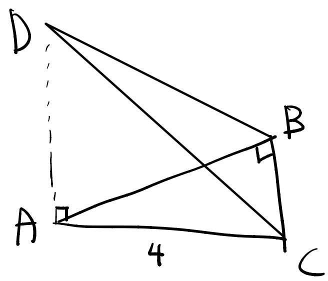
$\therefore m=2,\ n=11$

26. 좌표공간에

$$\overline{AB}\perp\overline{BC},\quad \overline{AC}=4,\quad \overline{AB}>\overline{BC}$$

인 서로 다른 세 점 A, B, C가 있다. 평면 ABC 위에 있지 않은 점 D에 대하여 점 D의 평면 ABC 위로의 정사영이 점 A일 때, 삼각형 ABC의 넓이가 $2\sqrt{3}$ 이고, 삼각형 BCD의 넓이가 $4\sqrt{3}$ 이다. 사면체 ABCD의 부피는? [3점]

① $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ ④ $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $4\sqrt{3}$



삼수선 정리에 의해 $\overline{DB}\perp\overline{BC}$

$\Rightarrow$ 면ABC와 면BCD의 이면각 $=\angle ABD$

$\Rightarrow \triangle BCD\times\cos(\angle ABD)=\triangle ABC$ $\therefore \angle ABD=\frac{\pi}{3}$

$\triangle ABC$에서 $\begin{cases}\overline{AB}\times\overline{BC}\times\frac{1}{2}=2\sqrt{3} \\ \overline{AB}^2+\overline{BC}^2=16\end{cases}$

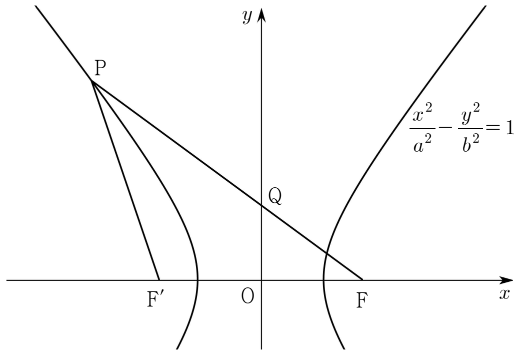
$\Rightarrow \overline{AB}=2\sqrt{3}$ $\overline{BC}=2$

$\therefore \overline{AD}=\overline{AB}\cdot\sqrt{3}=6$

$\therefore V=\frac{1}{3}\cdot2\sqrt{3}\cdot6=4\sqrt{3}$

27. 두 초점이 $\mathrm{F}(3,\,0)$, $\mathrm{F}'(-3,\,0)$인 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$이 있다. 이 쌍곡선 위에 있는 제2사분면 위의 점 P에 대하여 직선 PF가 y축과 만나는 점을 Q라 하자.
$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PF'}}=\dfrac{5}{3}\overline{\mathrm{QF}}$일 때, $\dfrac{b^2}{a^2}$의 값은? [3점]

① 1　② $\dfrac{8}{5}$　③ 2　④ $\dfrac{13}{5}$　⑤ 3



$\overline{QF}$를 $3t$라 하자. ⇒ $\overline{PQ}=\frac{5}{3}\overline{QF}=5t$.

· 장축의 길이 : $2a=8t-5t=3t$ … ㉠

· 초점 : $\sqrt{a^2+b^2}=3$ ⇒ $a^2+b^2=9$ … ㉡

$\triangle OQF$에서 $\cos(\angle OQF)=\frac{3}{3t}=\frac{1}{t}$

$\triangle PFF'$에서 코사인법칙을 사용하여

$(9t)^2=6^2+(8t)^2-2\cdot6\cdot8t\cdot\cos(\angle OQF)$

$25t^2=36+64t^2-96$　∴ $t^2=\frac{20}{13}$

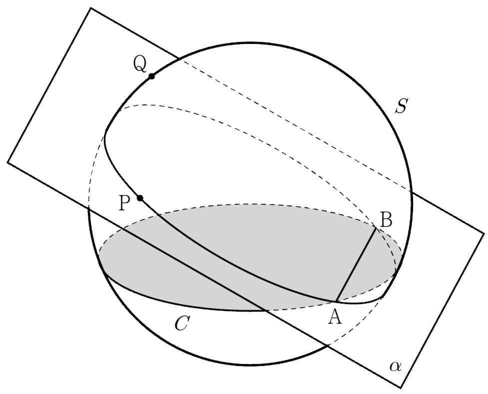
$2a=3t \iff 4a^2=9t^2 \Rightarrow a^2=\frac{45}{13}$

∴ ㉡에 $a^2=\frac{45}{13}$을 대입하여 $b^2=\frac{72}{13}$

$\Rightarrow \frac{b^2}{a^2}=\frac{8}{5}$

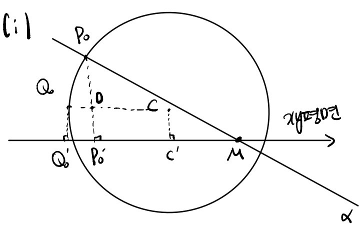
28. 좌표공간에 중심이 $(0,\,0,\,1)$이고 반지름의 길이가 5인 구 S가 있다. 구 S가 xy평면과 만나서 생기는 원을 C라 하고, $\overline{\mathrm{AB}}=4\sqrt{2}$가 되도록 원 C 위에 두 점 A, B를 잡는다.
두 점 A, B를 지나는 평면 α가 구 S와 만나서 생기는 원 위를 움직이는 점 P에 대하여 삼각형 ABP의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값을 a, 구 S 위를 움직이는 점 Q에 대하여 삼각형 ABQ의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값을 b라 할 때, $b-a=2\sqrt{2}$이다.
평면 α가 xy평면과 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? [4점]

① $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　② $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　③ $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$　④ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　⑤ $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$



이 도형을 $\overline{AB}$에 수직이 되도록 단면화하면

(i)



$\triangle ABP$가 최대일때 P를 P_0, $\triangle ABQ$가 최대일때 Q를 Q_0라 하자. 각각의 xy평면으로의 정사영을 P_0', Q_0'이라 하자.
$\overline{AB}$의 중점을 M이라 하자
⇒ $\overline{P_0M}$, $\overline{Q_0M}$은 두 삼각형의 높이.

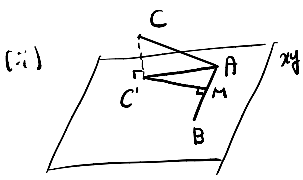
∴ $a=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{P_0'M}=2\sqrt{2}\,\overline{P_0'M}$, $b=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{Q_0'M}=2\sqrt{2}\,\overline{Q_0'M}$

$b-a=2\sqrt{2}(\overline{Q_0'M}-\overline{P_0'M})=2\sqrt{2}$　∴ $\overline{Q_0'M}-\overline{P_0'M}=1 \Rightarrow \overline{P_0'Q_0'}=1$

구의 중심을 C라 하고, xy평면으로의 정사영을 C′, $\overline{CQ_0}$와 $\overline{P_0P_0'}$의 교점을 D라 하자

$\overline{CQ_0}=\overline{CP_0}=5 \Rightarrow \overline{CD}=4$, $\overline{DP_0}=3$

(ii)

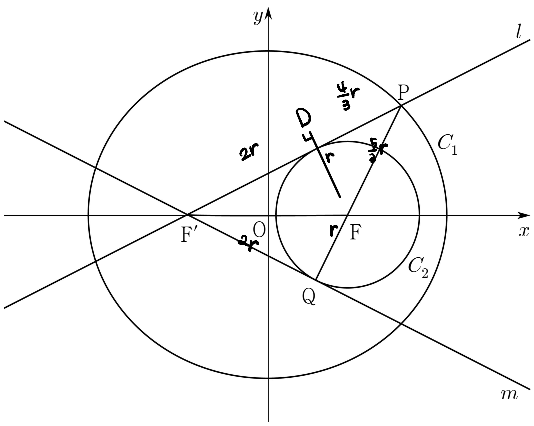


$\overline{AC}=5$, $\overline{CC'}=1$, $\overline{AM}=2\sqrt{2}$
$\Rightarrow \overline{AC'}=2\sqrt{6}$, $\overline{C'M}=4$

(iii) (i)의 그림에서 $\overline{P_0P_0'}=4$, $\overline{P_0'M}=8$
$\Rightarrow \cos\theta=\cos(\angle P_0MP_0')=\frac{2}{\sqrt{5}}$

단답형

29. 두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)\ (c>0)$이고 장축의 길이가 6인 타원 C_1이 있다. 점 F를 중심으로 하고 타원과 만나지 않는 원 C_2에 대하여 점 F′에서 원 C_2에 그은 두 접선을 l, m이라 할 때, 직선 l이 타원 C_1과 제1사분면에서 만나는 점을 P, 직선 m이 원 C_2와 만나는 점을 Q라 하자. 직선 PQ가 점 F를 지나고, $\cos(\angle \mathrm{F'PQ})=\dfrac{4}{5}$일 때, 삼각형 PFF′의 넓이를 S라 하자. $100S$의 값을 구하시오. [4점] 240



점F에서 $\overline{\mathrm{F'P}}$에 내린 수선의 발을 D라 하자.

원 C_2의 반지름을 r이라 하자. $\Rightarrow \overline{\mathrm{FD}}=r$.

$\triangle$PDF에서 $\overline{\mathrm{DP}}=\frac{4}{3}r,\ \overline{\mathrm{FP}}=\frac{5}{3}r$.

$\triangle$PQF′에서 $\overline{\mathrm{FQ}}=r$이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{5}{3}r+r=\frac{8}{3}r$

$\Rightarrow \overline{\mathrm{F'Q}}=\overline{\mathrm{F'D}}=2r$.

장축의 길이가 6이므로 $2r+\frac{4}{3}r+\frac{5}{3}r=5r=6$

$\therefore r=\frac{6}{5}$

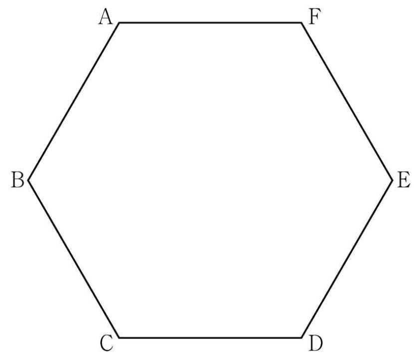
$S=\triangle \mathrm{PFF'}=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{PF'}}\cdot\overline{\mathrm{DF}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{3}r\cdot r=\frac{12}{5}$

$\Rightarrow 100S=240$.

30. 한 변의 길이가 4인 정육각형 ABCDEF에 대하여 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overrightarrow{\mathrm{FA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FP}}=16$
> (나) $-8\le\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}\le 16$
> (다) $\overrightarrow{\mathrm{DQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EQ}}=0$

선분 CD의 중점 M에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{CQ}}|$가 최대일 때 $\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$의 값을 M, $|\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{CQ}}|$가 최소일 때 $\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$의 값을 m이라 하자. $\dfrac{m^2}{M^2}=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] 83



(가) 시점을 A로 변경

$\Rightarrow -\overrightarrow{\mathrm{AF}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AF}})=-\overrightarrow{\mathrm{AF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+|\overrightarrow{\mathrm{AF}}|^2=-\overrightarrow{\mathrm{AF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+16=16$

$\therefore \overrightarrow{\mathrm{AF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0 \Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{AF}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}$

(나) 시점을 A로 변경

$\Rightarrow -\overrightarrow{\mathrm{AB}}(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+(\overrightarrow{\mathrm{AB}})^2=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+16$

$\therefore -8\le-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+16\le16 \Rightarrow 0\le\overrightarrow{\mathrm{AP}}\le4\sqrt{3}$ $(\because \angle\mathrm{EAB}=30^\circ)$

(가),(나)에 의해 점 P는 $\overline{\mathrm{AE}}$위의 점

(다) D, E의 중점을 M이라 하자.

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EQ}}=(\overrightarrow{\mathrm{MQ}}-\overrightarrow{\mathrm{MD}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{MQ}}-\overrightarrow{\mathrm{ME}})=(\overrightarrow{\mathrm{MQ}})^2-\overrightarrow{\mathrm{MQ}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{MD}}+\overrightarrow{\mathrm{ME}})+\overrightarrow{\mathrm{MD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ME}}$

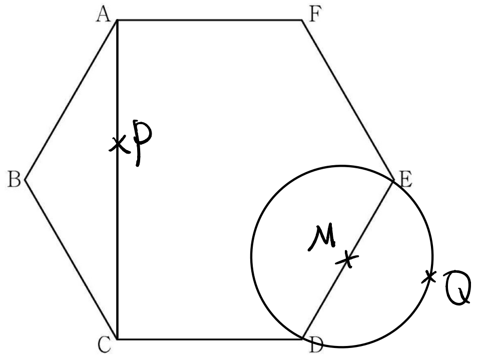
$=(\overrightarrow{\mathrm{MQ}})^2-4=0$

$\therefore$ 점 Q는 $\overline{\mathrm{DE}}$를 지름으로 하는 원.

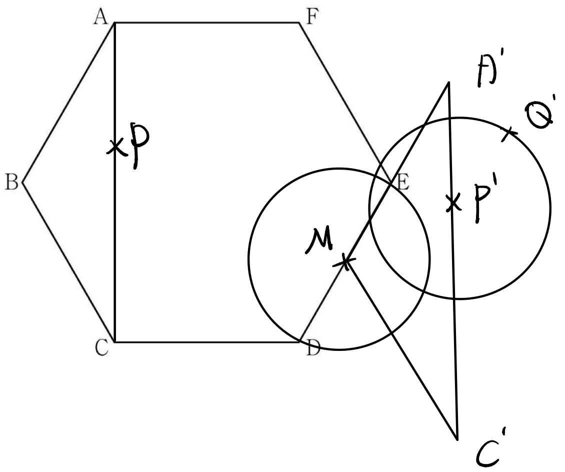
뒷장에 이어서

> ∗ 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

(가)~(다)를 그림에 표현하면

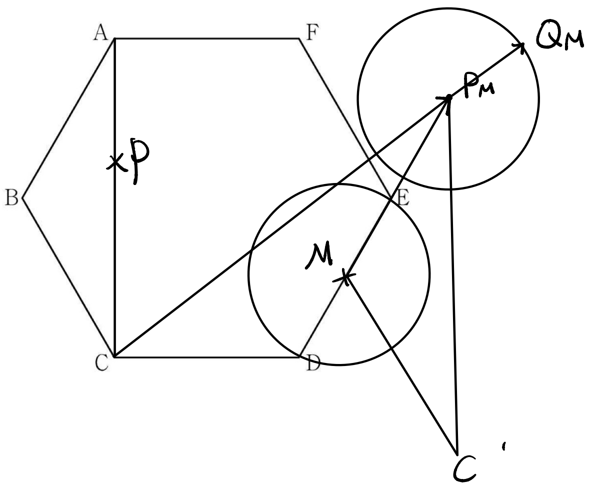


점 B를 점 M으로 옮겨 생각하면



$|\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CQ}| = |\overrightarrow{MP'}+\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MQ}| = |\overrightarrow{CP'}+\overrightarrow{MQ}| = |\overrightarrow{CQ'}|$

(i) 해당 값이 최대일때 P, Q를 P_M, Q_M이라 하면



$M = \overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MP_M}\cdot\overrightarrow{P_MQ_M} = |\overrightarrow{MP_M}|\,|\overrightarrow{P_MQ_M}|\,\cos(\angle CP_MD)$

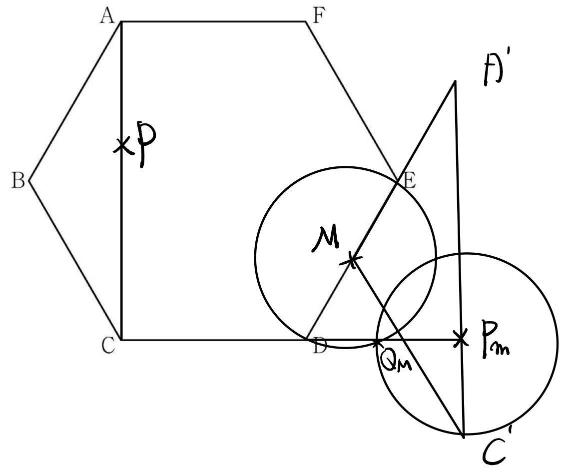
$\triangle CDP_M$에서 $\overline{CD}=4$, $\overline{DP_M}=6$, $\cos(\angle CDP_M)=120°$

$\Rightarrow \overline{CP_M}^2 = 16+36-2\cdot4\cdot6\cdot\cos120° = 16+36+24 = 76 \Rightarrow \overline{CP_M} = 2\sqrt{19}$

$\Rightarrow \cos(\angle CP_MD) = \frac{36+76-16}{2\cdot6\cdot2\sqrt{19}} = \frac{4\sqrt{19}}{19}$

$\therefore M = 4\cdot2\cdot\frac{4\sqrt{19}}{19} = \frac{32\sqrt{19}}{19}$

(ii) 해당 값이 최소일때 P, Q를 P_m, Q_m이라 하면



P_m은 $\overline{A'C'}$의 3:1 내분점이다.

$m = \overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{MQ} = |\overrightarrow{MP_m}|\cdot|\overrightarrow{P_mQ_m}|\cdot\cos(\angle MP_mQ_m)$

$= -(\overline{P_mQ_m})^2 = -4$ ($\because$ 정사영)

$\therefore \frac{M}{m} = \frac{32\sqrt{19}}{19}\times\frac{1}{(-4)} = \frac{8\sqrt{19}}{19}$

$\Rightarrow \frac{M^2}{m^2} = \frac{64}{19}$ $\therefore p=19,\ q=64 \Rightarrow p+q=83$

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.